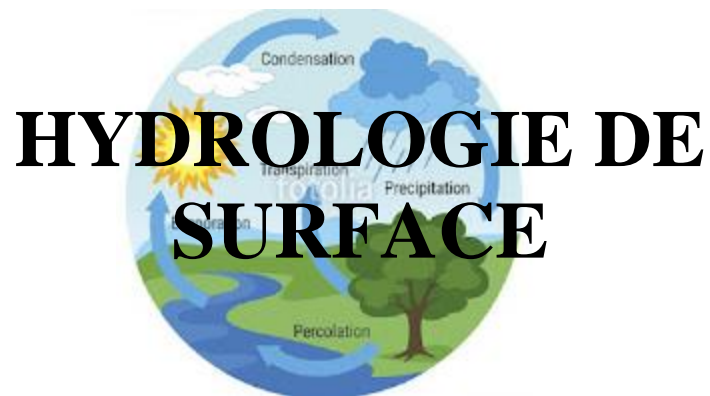


Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Ali Kafi Tindouf
Institut des sciences et technologies
Département des sciences de la terre et l'univers



Par BEKKOUCH Mohamed Fouzi
MCA au centre universitaire de Tindouf
Année Universitaire 2021/2022

Les cours sont destinés pour les étudiants de la 3^{eme} Année licence et Master I
Hydrogéologie.

Table des Matières

I - INTRODUCTION A L'HYDROLOGIE DE SURFACE

I - 1 : DEFINITIONS

I - 2 : SCIENCES UTILISEES

I - 3 : DOMAINES D'APPLICATIONS

I - 4 : LES METHODES DE TRAVAIL EN HYDROLOGIE DE SURFACE

II - LE CYCLE DE L'EAU

II - 1 : ETATS ET SITUATIONS DE L'EAU

II - 2 : STOCKS, FLUX ET INERTIE DES SYSTEMES

II- 2. 1 : Volumes

II- 2 - 2 : Flux

II- 2 - 3 : Inertie des systèmes

II - 3 : CYCLE DE L'EAU

III - LE BASSIN VERSANT

III.1 - NOTION DE "BASSIN VERSANT"

III.1.1 - Bassin versant topographique

III.1.2 - Bassin versant hydrogéologique

III.2 - CARACTERISTIQUES MORPHOMETRIQUES

III.2.1 - Caractéristiques de la disposition dans le plan

III.2.1.1 - Surface A

III.2.1.2 – Longueur

III.2.2 - Caractéristiques des altitudes (hypsométrie)

III.2.3 - Les indices de pente

III.2.3.2 - Indice de pente de Roche I_p

III.2.3.3 - Indice de pente globale I_g

III.2.3.4 - Dénivelée spécifique D_s

III.2.3.5 - "Reliefs ratios

III.2.4 - Les Modèles Numériques de Terrain

III.3 - CARACTERISTIQUES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE

III.3.1 - Hiérarchisation du réseau

III.3.2 - Les lois de Horton

III.3.3 - Autres caractéristiques du chevelu

III.3.3.1 - La densité de drainage D_d

III.3.3.2 - La fréquence des thalwegs d'ordre 1 : F1

III.3.3.3 - La courbe aire-distance

III.3.3.4 – Endoréisme

III.3.3.4 – Endoréisme

III.4 - CARACTERISTIQUES GEOLOGIQUES

III.5 - LE COUVERT VEGETAL

III.6 - CARACTERISTIQUES GLACIOLOGIQUES

IV - L'ATMOSPHERE

IV.1 - CONSTITUTION DE L'ATMOSPHERE

IV.1.1 - Composition de l'atmosphère

IV.1.1.1 - Atmosphère sèche

IV.1.1.2 - Mélange air-eau

IV.1.2 - Champ vertical des pressions

IV.1.3 - Champ vertical des températures

IV.1.3.1 - Champ vertical moyen

IV.1.3.2 - Gradient vertical de l'adiabatique sèche

IV.1.3.3 - Gradient vertical de l'adiabatique humide

IV.1.3.4 - Gradient vertical du point de rosée

IV.1.4 - Stabilité et instabilité atmosphérique

IV.1.5 - Etude des précipitations

IV.1.5.1 - Les nuages

IV.1.5.2 - Déclenchement des précipitations

IV.1.5.3 - Entretien des précipitations

IV.1.5.3.1 Précipitations de convection

IV.1.5.3.2 Précipitations orographiques

IV.1.5.3.3 Précipitations de front

IV.1.5.4 - Précipitations solides

IV.1.5.4.1 La grêle

IV.1.5.4.2 La neige

IV.2 - L'ATMOSPHERE, COLLECTEUR DE CHALEUR

IV.2.1 - L'énergie solaire

IV.2.2 - Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère

IV.2.3 - Rayonnement terrestre

IV.3 - CIRCULATION GENERALE DANS L'ATMOSPHERE

IV.3.1 - Les pressions et les vents

IV.3.1.1 - Répartition méridienne

IV.3.1.2 - Influence de la rotation terrestre

IV.3.1.3 - Influence de la répartition des terres et des océans

V - MESURES LIEES A L'ESTIMATION DE L'EVAPORATION ET DE L'EVAPOTRANSPIRATION

V.1 - MESURE DES PARAMETRES PHYSIQUES CONDITIONNANT L'EVAPORATION

V.1.1 - Mesure des températures

V.1.2 - Mesure de l'humidité de l'air

V.1.2.1 – Psychromètre

V.1.2.2 - Hygromètre enregistreur

V.1.3 - Mesure des pressions

V.1.4 - Mesure du vent

V.2 - MESURES DE L'EVAPORATION

V.2.1 - Mesures de l'évaporation à partir d'une surface libre

V.2.1.1 - Bac classe A (du Weather Bureau, U.S.A.)

V.2.1.2 - Bac Colorado et Bac ORSTOM

V.2.1.3 - Bac CGI 30

V.2.2 - Mesure de l'évaporation à partir de surfaces poreuses : les atmomètres

V.2.2.1 - Le "Black Bellani"

V.2.2.2 - Le "Piche"

V.3 - MESURES ET ESTIMATION DE L'EVAPOTRANSPIRATION

V.3.1 - Notion d'évapotranspiration réelle et potentielle

V.3.2 - Mesures directes

V.3.3 - Estimation de l'évapotranspiration

V.3.3.1 - Formule de Turc

V.3.3.2 - Formule de Thornthwaite

V.3.4 - Evaluation de l'évapotranspiration réelle

V.3.4.1 - Formule de Turc

V.3.4.2 - Bilan simplifié selon THORNTHWAITE

VI - MESURES DES PRECIPITATIONS

VI.1 - DIFFICULTES DE LA MESURE

VI.2 - APPAREILLAGES PLUVIOMETRIQUES

VI.2.1 - Les pluviomètres

VI.2.2 - Les pluviographes

VI.2.2.1 Enregistrement mécanique

VI.2.2.2 Pluviographe transducteur d'impulsions

VI.2.2.3 Mesure de l'équivalent en eau des chutes de neige

VI.2.2.4 Précision des appareils

VI.2.3 - Les nivomètres

VI.2.3.1 - Mesures par sondage

VI.2.3.2 - Mesures en continu du poids

VII – HYDROMETRIE

VII.1 - ACQUISITION DES DEBITS EN FONCTION DU TEMPS

VII.2 - LES METHODES DE JAUGEAGES

VII.2.1 - Réservoirs étalonnés

VII.2.2 – Déversoirs

VII.2.3 - Jaugeurs à ressaut

VII.2.4 - Jaugeages par dilution

VII.2.4.1 - Choix du traceur

VII.2.4.2 - Choix du site

VII.2.4.3 - Injection à débit constant

VII.2.4.4 - Méthode dite globale

VII.2.4.5 - Mise en œuvre pratique

VII.2.4.5.1 Concentrations C1 à injecter

VII.2.4.5.2 Injection

VII.2.4.5.3 Prélèvements et analyses

VII.2.4.6 - Domaine d'application

VII.3.2 – Limnimétrie

VII.3.2.1- Les échelles

VII.3.2.2 - Les limnigraphes à flotteur

VII.3.2.3 - Les limnigraphes dits à bulles

VII.3.2.4 - Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.)

VII.3.2.5 - Limnigraphes à ultra-sons

VII.3.3 - Les sections de jaugeage

VII.3.4 - Les courbes de tarage

VIII.- STATISTIQUES APPLIQUEES A L'HYDROLOGIE

VIII.1. - RAPPELS ET GENERALITES

VIII.1.2. - Notions de probabilité

VIII.1.3. - Résultats fondamentaux

VIII.2. LA LOI DE PROBABILITE

VIII.2.1. - Notion de loi de probabilité

VIII.2.1.1 - Cas des variantes discrètes

VIII.2.1.2 - Cas des variantes continues

VIII.2.2. - Construction d'une loi de probabilité

VIII.2.2.1 - Des paramètres de forme

VIII.2.2.2 - Des paramètres d'échelle s

VIII.2.2.3 - Des paramètres de position x_0

VIII.2.2.4 - Variable réduite

VIII.2.3. - Paramètres définis d'après cette loi

VIII.2.3.1 - Paramètres de tendance centrale

VIII.2.3.2 – Moments

VIII.2.3.3 - Paramètres caractéristiques de la forme

VIII.3. - DETERMINATION DES PARAMETRES D'APRES UN ECHANTILLON

VIII.3.1. - Qualité des estimations

VIII.3.2. - Tests d'ajustement

VIII.3.2.1 - Test du χ^2 de Pearson

VIII.3.2.2 - Test W_n^2 d'Anderson

VIII.3.2.3 - Autres tests

VIII.3.3. - Moments déduits d'un échantillon de taille connue

VIII.3.4 - Méthodes d'ajustement

VIII.3.3.1 - Méthode des moments

VIII.3.3.2 - Méthode du maximum de vraisemblance

VIII.3.3.3 - Ajustement graphique

VIII.4. - STATISTIQUE DE RANG

VIII.4.1. - Probabilité des valeurs d'un échantillon observé

VIII.4.2. - Danger d'apparition

VIII.4.2.1 - Période de retour

VIII.4.2.2 - Fréquence d'apparition d'une valeur connue "a priori"

VIII.4.2.3 - Problème inverse

VIII.5. - DIFFERENTS TYPES DE LOIS UTILISES EN HYDROLOGIE

VIII.5.1. - Loi de Gauss ou loi normale

VIII.5.1.1 - Fonction de répartition

VIII.5.1.2 - Estimation des paramètres

VIII.5.1.3 - Erreurs-types sur les estimations

VIII.5.1.4 - Intervalles de confiance

VIII.5.1.5 - Comparaison de deux échantillons

VIII.5.2. - Loi de Galton (ou log-normale ou de Gibrat-Gauss)

VIII.5.2.1 - Fonction de répartition

VIII.5.2.2 - Estimation des paramètres

VIII.5.2.3 - Intervalles de confiance

VIII.5.2.4 - Cas particulier fréquent et simple où x_0 n'est plus un paramètre à ajuster

VIII.5.3. - Loi de Gumbel

VIII.5.3.2 - Estimation des paramètres

VIII.5.3.3 - Intervalle de confiance

VIII.6. - ASSOCIATION ENTRE VARIABLES

VIII.6.1. - Notion de corrélation

VIII.6.2. - Courbes et droites de régression

VIII.6.2.1 - Courbe de régression

VIII.6.2. - Régression simple

VIII.6.3.1 - Choix du modèle linéaire - droite des moindres carrés

VIII.6.2.2 - Précautions à prendre

VIII.6.2.3 - Utilisation pratique de la régression simple

VIII.6.3. - Régression double

VIII.6. 3.1 - Equation de la régression double linéaire

Liste des figures

Figure	Page
Fig.01 : Organisation schématique et évolution dans le temps d'un service hydrologique	03
Fig. 02 : Les flux annuels	05
Fig. 03 : Cycle hydrologique schématique	06
Fig.04 : Délimitation d'un bassin versant topographique	07
Fig. 05 : Bassin versant hydrologique et bassin versant hydrogéologique	08
Fig.06 : Schématisation du périmètre d'un bassin	08
Fig.07 : Ajout d'un périmètre fictif pour un bassin versant replié	08
Fig.08 : Caractéristique de longueur d'un bassin versant	09
Fig.09 : Courbe hypsométrique	10
Fig.10 : Rectangle équivalent	11
Fig.11 : Calcul de la pente moyenne	11
Fig. 12 : Indice de pente de Roche	12
Fig.13 : Classification de Strahler	15
Fig.14 : Abaque relie le nombre, la longueur moyenne et l'ordre des cours d'eau	16
Fig.15 : Exemple d'un profil a long	17
Fig.16 : Variations de gradients des températures dans l'atmosphère	23
Fig. 17 : Stabilité et instabilité de l'air	25
Fig.18 : Relation entre vitesse et diamètre des gouttelettes	26
Fig. 19 : Précipitations de convection	27
Fig.20 : formation des précipitations orographiques	28
Fig. 21 : Formation des précipitations de front	28
Fig. 21 : Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère	30
Fig.22 : Schéma simplifié d'un thermomètre à maxima	34
Fig.23 : Schéma simplifié d'un thermomètre à minima	34
Fig.24 : schéma d'un Psychromètre	36
Fig.25 : barographe métallique à capsule anéroïde	37
Fig.26 : Anémomètre girouette et enregistreur	38
Fig.27 : Bac classe A	38
Fig.28. Bac Colorado et Bac ORSTOM	39

Fig.29 : Black Bellani	40
Fig.30 : Le piche	40
Fig.31 : case lysimétrique	41
Fig.32 : Abaques permettent d'évaluer I_gA et H	43
Fig.33 : Pluviomètre avec éprouvette graduée	47
Fig.34 : Principe d'un pluviographe à siphon	47
Fig. 35 : Pluviomètre à augets	48
Fig.36 : Jaugeage réservoir étalonné	52
Fig.37 : Jaugeage par déversoir	52
Fig.38 : Jaugeurs à ressaut	53
Fig.39 : Jaugeages par dilution	54
Fig. 40 : Courbe de l'apparition et disparition de fluorescéine	57
Fig.41 : Temps de réponse de fluorescéine	57
Fig.42 : Intégrale de $C_2(t)$	58
Fig.43 : Récipient fermé pour injecter le traceur	59
Fig.44 : Outil et méthode de prélèvement	60
Fig.45 : Echelle pour mesurer le niveau H	61
Fig.46 : limnigraphe à flotteur	62
Fig.47 : Méthode d'installation de Limnigraphe sur terrain	63
Fig.48 : limnigraphe à bulles	64
Fig.49 : Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.)	65
Fig.50 : Limnigraphes à ultra-sons	65
Fig.51 : Etablissement d'une courbe de tarage	67
Fig. 52 : Variable discrète	70
Fig. 53 : Variable continue	70
Fig. 54 : Sens de la symétrie	74
Fig.55 : Les différents aplatissement de β_2	75
Fig. 56 : Fonction de densité	82
Fig.57 : Variable réduite de Gauss	83
Fig.58 : Variations de β_1 et β_2 avec σ	89
Fig. 59 : La fonction de densité de la loi de Gauss	90
Fig. 60 : Variable réduite de Gauss	91
Fig.61 : Fonction de densité pour la loi de Gambel	93
Fig.62 : Variable réduite de Gumbel	94

Fig.63 : Les lois de distribution	96
Fig. 64 : Courbe de régression de y en x	96
Fig. 65 : Droite de régression simple	98

Liste des Tableaux

Tableau	Page
Tab.01 : Les sciences utilisées par Hydrologie	01
Tab.02 : Cycle classique de l'eau	04
Tab. 03 : Indice de pente globale et type de relief	13
Tab.04 : Dénivelée spécifique Ds et type de relief	13
Tab.05 : Classification de F.HIRSCH	15
Tab.06 : Classification du bassin selon la nature géologique	18
Tab.07 : Composition de l'atmosphère à l'état sèche	21
Tab.08 : Tension de vapeur selon la température	21
Tab.09 : Exemple de variation de coefficient K avec les mois	44
Tab.10 : Exemple de bilan hydrique de C.V.THRANTHWAITE	45
Tab. 11 : l'ordre de grandeur des distances de bon mélange selon M. ANDRE	56
Tab.12 : Concentrions des principaux traceurs	58
Tab. 13 : fréquence au non-dépassement de u	82

I - INTRODUCTION A L'HYDROLOGIE DE SURFACE

I - 1 : DEFINITIONS :

D'une façon très générale, l'hydrologie peut se définir comme l'étude du cycle de l'eau et l'estimation de ses différents flux. L'hydrologie au sens large regroupe :

- la climatologie, pour la partie aérienne du cycle de l'eau (précipitations, retour à l'atmosphère, transferts, *etc.*) ;
- l'hydrologie de surface au sens strict, pour les écoulements à la surface des continents
- l'hydrodynamique des milieux non saturés pour les échanges entre les eaux de surface et les eaux souterraines (infiltration, retour à l'atmosphère à partir des nappes, *etc.*) ;
- l'hydrodynamique souterraine (*sensu stricto*) pour les écoulements en milieux saturés.

L'hydrologie de surface est la science qui traite essentiellement des problèmes qualitatifs et quantitatifs des écoulements à la surface des continents. Ces problèmes se ramènent généralement à des prévisions (associer à une date une certaine grandeur) ou des prédéterminations (associer à une grandeur une certaine probabilité) de débits ou de volume en un point ou sur une surface.

I - 2 : SCIENCES UTILISEES

L'étude de la partie "écoulement superficiel" du cycle de l'eau nécessite quand même de connaître les autres parties de ce cycle. L'hydrologie de surface est une science appliquée qui fait appel à des connaissances dans des domaines très divers :

Tab.01 : Les sciences utilisées par Hydrologie.

Sciences et Techniques	Domaines d'application
Météorologie et Climatologie	Etude des pluies et du retour à l'atmosphère
Géologie, Géographie et Pédologie	Analyse du comportement hydrologique du bassin
Hydraulique	Mesure et étude des écoulements à surface libre
Statistique	Traitement des données, simulations...
Calcul numérique	Propagation de crue, modélisations et optimisations...
Informatique	Instrument de travail pour les calculs numériques, le stockage des données...

I - 3 : DOMAINES D'APPLICATIONS

Les domaines d'application de l'hydrologie de surface sont également très variés. Parmi les plus importants et les plus classiques, on notera :

- l'agriculture : irrigation, drainage ;
- l'étude des ressources en eaux : eau potable, eau pour l'industrie ;
- la lutte contre la pollution : étude des débits d'étiage évacuant les effluents, les calories;
- l'énergie hydraulique ;

- le transport solide (dépôt ou érosion) ;
- la navigation ;
- les loisirs (plans d'eau) ;
- la sécurité des biens et des personnes : protection contre les crues...

I - 4 : LES METHODES DE TRAVAIL EN HYDROLOGIE DE SURFACE

L'hydrologie de surface est une science essentiellement appliquée. La recherche et le développement de cette branche ont toujours été liés à l'existence de problèmes concrets. Ceux-ci ont évolué au cours des temps : on s'est d'abord intéressé aux crues, on en vient seulement à prendre conscience de l'intérêt de l'étude des étiages. En effet, aux besoins quantitatifs s'ajoutent à présent des problèmes de qualité. Parallèlement à l'évolution des besoins, les progrès des techniques ont transformé nos méthodes de travail.

On peut essayer de schématiser chronologiquement ces dernières de la façon suivante :

Dans une première phase, à chaque problème particulier qui se posait, la réponse de l'hydrologue s'appuyait sur des observations effectuées au point particulier intéressant. Il en déduisait les solutions recherchées : alimentation en eau, protection contre les crues, possibilité de navigation, *etc.*

Au cours des temps, les stations créées pour chaque problème particulier n'ont pas toutes été abandonnées, et l'on s'est trouvé en présence d'un réseau appelé réseau original, constitué de stations très hétéroclites : chacune d'entre elles répondait à des besoins divers et spécifiques. Elles étaient gérées en outre par différents services (en France par exemple : Ponts et Chaussées, Electricité de France, Ministère de l'Agriculture, Ministère de l'Industrie, *etc.*). L'ensemble des résultats acquis sur le réseau original constituait donc une banque de données.

On en arrive alors à un deuxième stade où l'hydrologue n'est plus obligé d'établir de nouvelles stations pour résoudre un problème. Il peut obtenir des résultats en extrapolant ceux enregistrés sur des stations du réseau original, voisines ou comparables. Il peut également se contenter d'une station nouvelle (station tertiaire ou station de projet), mais observée sur une courte période. Les données de cette station seront étendues par corrélation avec celles, plus longues, du réseau original.

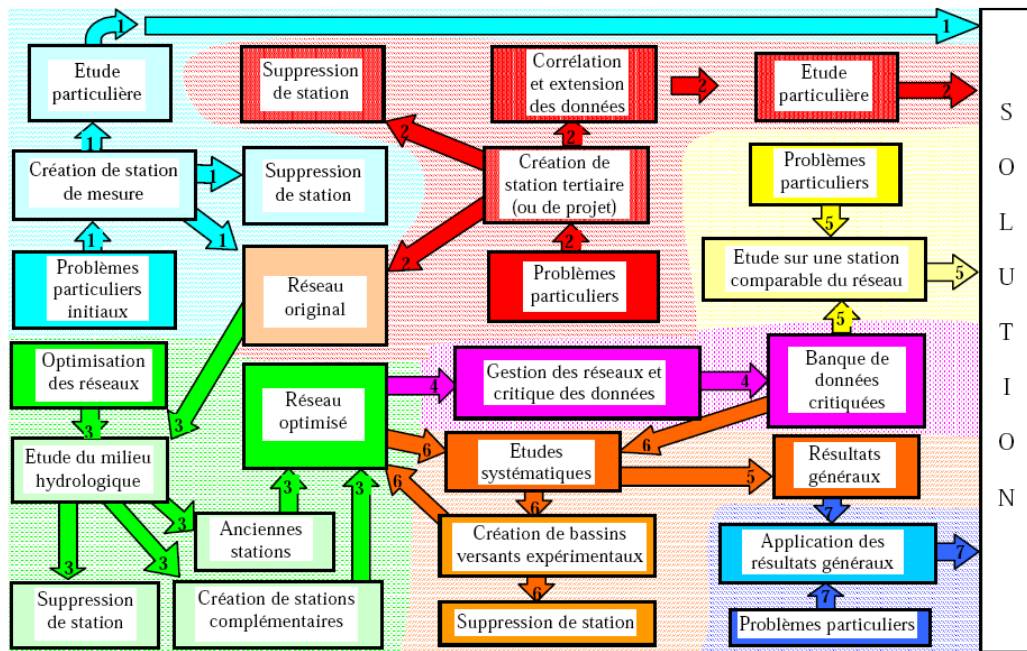


Fig.01 : Organisation schématique et évolution dans le temps d'un service hydrologique.

Par la suite, les services hydrologiques peuvent parfois ne plus s'intéresser uniquement aux problèmes particuliers. On atteint le stade des problèmes généraux qui se ramènent essentiellement à :

- L'optimisation et la planification du réseau (démarche 3) : Ces deux types de travaux reposent sur l'étude du milieu hydrologique. On ramène l'ensemble des paysages à un nombre fini de régions dites hydrologiquement homogènes. La planification permet de déterminer le nombre minimal de stations nécessaires à la connaissance de chaque type de milieu hydrologique. L'optimisation met en évidence, par comparaison avec le réseau original, les zones sur-observées, et par conséquent, les stations à supprimer et éventuellement les zones à équiper.
- L'élaboration d'une base de données fiables (démarche 4) par analyse critique de l'ensemble des observations disponibles.
- Les études systématiques (démarche 6) : Elles s'intéressent à un même phénomène (crues, étiages, etc.) sur les différentes stations du réseau. Elles essaient de mettre en évidence des facteurs explicatifs et, si possible, de quantifier leurs influences, ceci afin d'extrapoler ces résultats généraux à des bassins versants non étudiés. A ce dernier stade s'ouvre une nouvelle voie 7 pour résoudre un problème particulier en un point. Celle-ci consiste à déterminer au site intéressant, les valeurs des facteurs explicatifs et à appliquer les résultats généraux obtenus sur l'ensemble du réseau.

II - LE CYCLE DE L'EAU

Le cycle de l'eau, appelé aussi cycle hydrologique, est l'ensemble des cheminements que peut suivre une particule d'eau. Ces mouvements, accompagnés de changements d'état, peuvent s'effectuer dans l'atmosphère, à la surface du sol et dans le sous-sol. Chaque particule n'effectue qu'une partie de ce cycle et avec des durées très variables : une goutte de pluie peut retourner à l'océan en quelques jours alors que sous forme de neige, en montagne, elle pourra mettre des dizaines d'années.

II - 1 : ETATS ET SITUATIONS DE L'EAU

Classiquement, on schématise les états et les situations de l'eau dans le cycle de la façon suivante :

Tab.02 : Cycle classique de l'eau

Etats	Principaux stocks	Phénomènes de transport	
Vapeur nuages, brouillards	humidité atmosphérique, évapotranspiration	évaporation	
Liquide	océans, mers, lacs, eaux souterraines	pluie, cours d'eau, nuages, circulations souterraines	
Solide	glaciers, manteaux neigeux, calottes polaires	neige, grêle, écoulement des glaciers	

II - 2 : STOCKS, FLUX ET INERTIE DES SYSTEMES

Quelles sont les quantités d'eau correspondant à chacun des termes de ce tableau, et avec quelles vitesses se font les échanges ? Les réponses à ces questions sont très difficiles à donner ; on pourra retenir, pour fixer les ordres de grandeur, les chiffres fournis par G. REMENIERAS :

II. 2. 1 : Volumes

En surface, les terres émergées ne représentent que 146 106 km² sur une surface totale de la planète de 510 106 km² (soit sensiblement 1/4). Cette disparité entre océans et terres est beaucoup plus accentuée entre eaux douces et eaux salées.

Le volume total des eaux douces est d'environ 36 106 km³, soit 2,8 % des réserves totales en eau. Par ailleurs, les eaux se répartissent à peu près ainsi, exprimées en épaisseur uniformément réparties sur la terre :

mers et océans : 2500 m.	eaux souterraines : 300 à 600 mm.
glaciers : 50 à 100 m.	eaux atmosphériques : 20 à 30 mm.
eaux continentales : 350 à 700 mm.	matière vivante : ε !

On retiendra que ce qui circule dans les cours d'eau ne représente qu'une partie absolument infime du volume d'eau total.

II - 2 - 2 : Flux

La vitesse avec laquelle l'eau circule est très variable ; généralement, on prend l'année comme période de référence.

Les flux annuels sous forme liquide et gazeuse (les plus importantes) sont sensiblement les suivants :

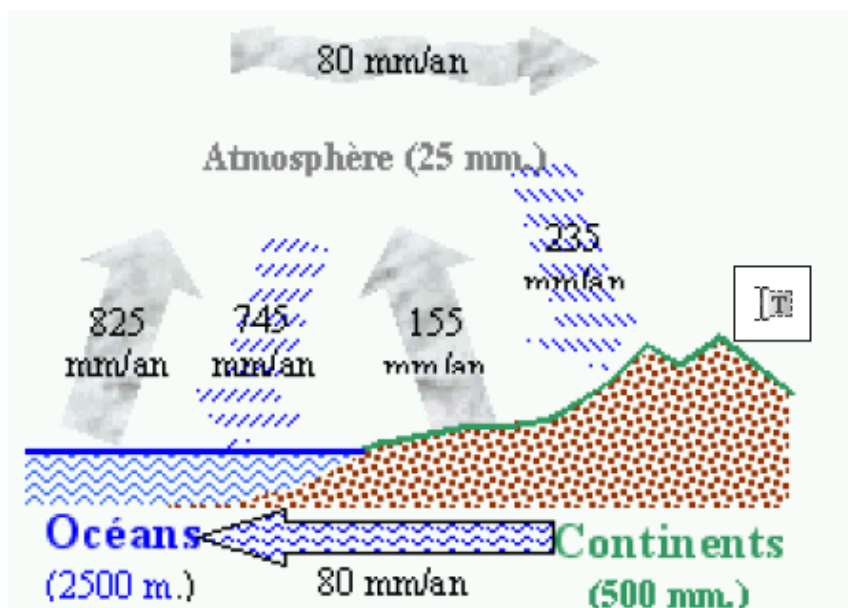


Fig. 02 : Les flux annuels

II- 2 - 3 : Inertie des systèmes

On appelle "taux de renouvellement" le rapport du stock au flux qui l'alimente et "temps de séjour" l'inverse du taux de renouvellement. Plus le temps de séjour est important, plus l'inertie du système est importante : c'est par exemple le cas des eaux souterraines où il atteint couramment, pour des nappes importantes, 10 à 50000 ans ; en revanche la quasi totalité des eaux continentales ont un temps de séjour relativement limité, de l'ordre de quelques jours à un an.

II - 3 : CYCLE DE L'EAU

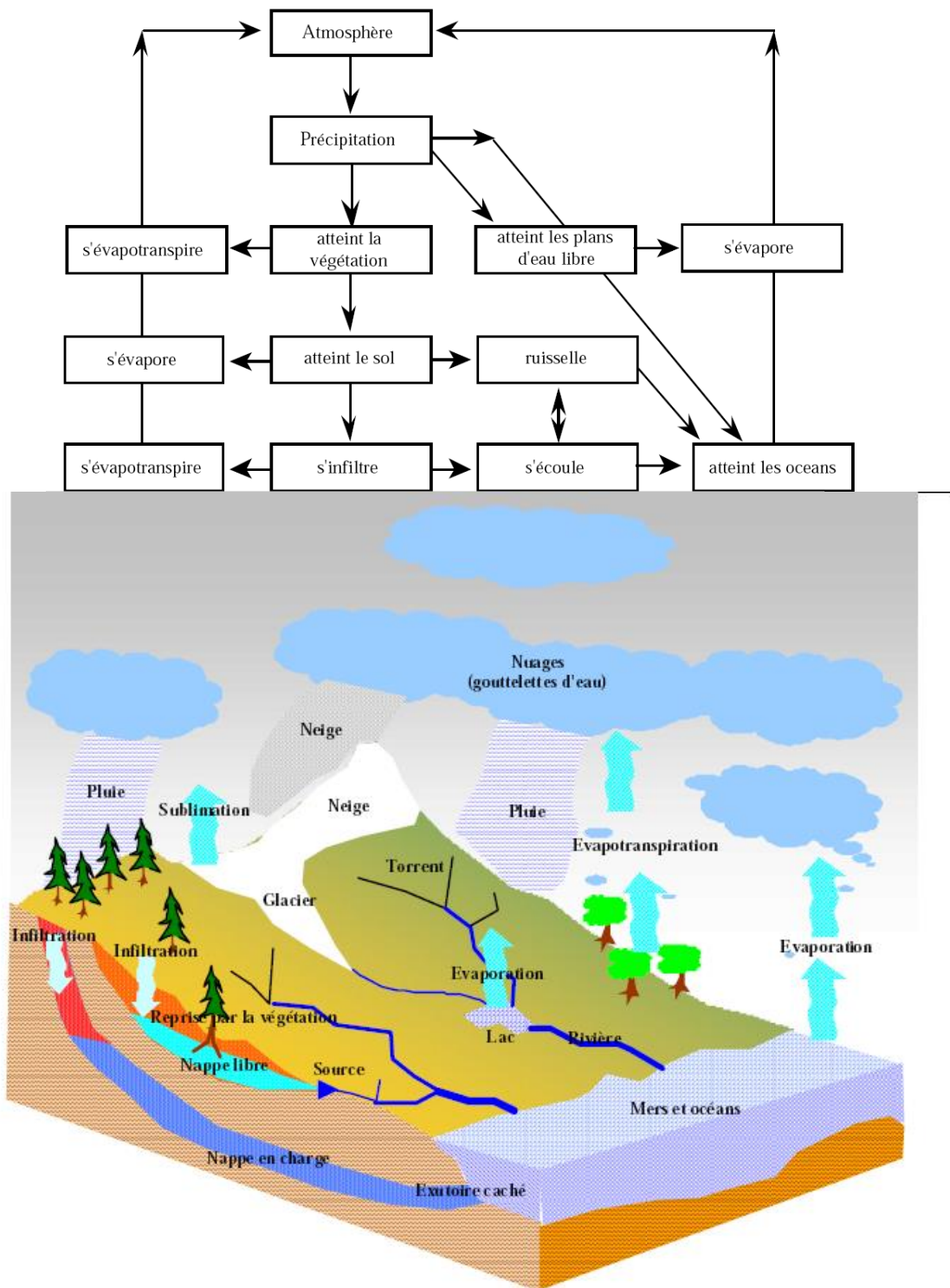


Fig. 03 : Cycle hydrologique schématique

III - LE BASSIN VERSANT

En tout point d'un cours d'eau, nous serons amenés à définir son bassin versant et à caractériser son comportement hydrologique.

III.1 - NOTION DE "BASSIN VERSANT"

Le bassin versant en une section d'un cours d'eau est défini comme la surface drainée par ce cours d'eau et ses affluents en amont de la section. Tout écoulement prenant naissance à l'intérieur de cette surface doit donc traverser la section considérée, appelée exutoire, pour poursuivre son trajet vers l'aval.

Selon la nature des terrains, nous serons amenés à considérer deux définitions.

III.1.1 - Bassin versant topographique

Si le sous-sol est imperméable, le cheminement de l'eau ne sera déterminé que par la topographie. Le bassin versant sera alors limité par des lignes de crêtes et des lignes de plus grande pente comme le montre la figure ci-jointe.

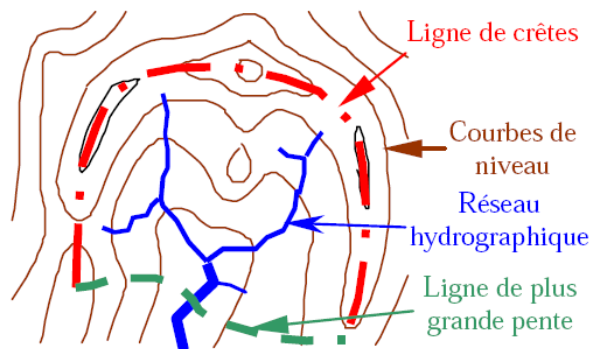


Fig.04 : Délimitation d'un bassin versant topographique

III.1.2 - Bassin versant hydrogéologique

Dans le cas d'une région au sous-sol perméable, il se peut qu'une partie des eaux tombées à l'intérieur du bassin topographique s'infilte puis sorte souterrainement du bassin (ou qu'à l'inverse des eaux entrent souterrainement dans le bassin).

Dans ce cas, nous serons amenés à ajouter aux considérations topographiques des considérations d'ordre géologique pour déterminer les limites du bassin versant.

Cette distinction entre bassin topographique et hydrogéologique se justifie surtout pour les petits bassins. En effet, lorsque la taille du bassin augmente, les apports et les pertes souterraines ont plus de chance de se compenser. De plus, on peut admettre que le débit des cours d'eau est proportionnel à la surface du bassin, les échanges souterrains se font, eux, aux frontières et varient donc sensiblement comme le périmètre. Lorsque la taille du bassin

augmente, la surface croît plus vite que le périmètre et la valeur relative des échanges souterrains par rapport au débit de surface tend à devenir négligeable.

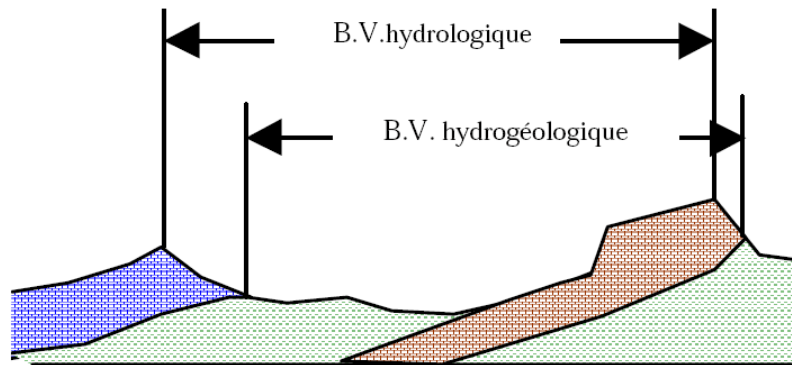


Fig. 05 : Bassin versant hydrologique et bassin versant hydrogéologique

III.2 - CARACTERISTIQUES MORPHOMETRIQUES

L'utilisation de caractéristiques morphométriques a pour but de condenser en un certain nombre de paramètres chiffrés, la fonction $h = f(x,y)$ à l'intérieur du bassin versant (h altitude, x et y coordonnées d'un point du bassin versant). Nous utiliserons trois types différents de paramètres morphométriques.

III.2.1 - Caractéristiques de la disposition dans le plan

III.2.1.1 - Surface A

La surface du bassin versant est la première et la plus importante des caractéristiques. Elle s'obtient par planimétrie sur une carte topographique après que l'on y ait tracé les limites topographiques et éventuellement hydrogéologiques. La surface A d'un bassin s'exprime généralement en km^2 .

III.2.1.2 – Longueur

On utilise différentes caractéristiques de longueur ; la première et une des plus utilisées est le "périmètre P du bassin versant".



Fig.06 : Schématisation du périmètre d'un bassin

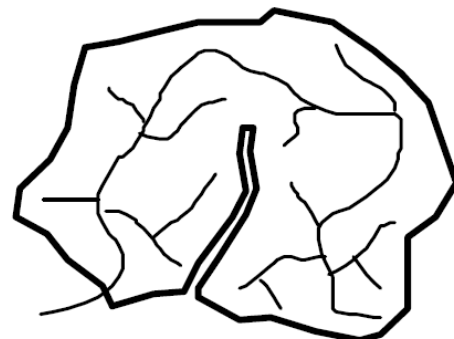


Fig.07 : Ajout d'un périmètre fictif pour un bassin versant replié

Le périmètre est curvimètre sur carte cartographique mais, selon l'échelle de la carte, les détails sont plus ou moins nombreux et il en résulte des différences de mesures. Par ailleurs, on devrait souvent prendre en compte des détails de la frontière qui, on s'en rend compte intuitivement, n'ont aucune influence sur l'écoulement. Avant de procéder au curvimétrage, il faut donc procéder à une schématisation des limites du bassin, soit par des courbes à grand rayon de courbure, soit par un tracé polygonal.

Dans des cas particuliers tels que celui d'un bassin replié sur lui-même, on pourra être amené à tracer des contours fictifs qui tiendront compte de chaque cas particulier.

Le périmètre P n'est généralement pas utilisé directement mais le plus souvent à travers des valeurs qui en dérivent, comme la "longueur L du rectangle équivalent". On définit le rectangle équivalent comme le rectangle de longueur L et de largeur I qui a même surface et même périmètre que le bassin versant, soit à l'aide de : $P = 2 \cdot (L + I)$ et $A = L \cdot I$

L'inconvénient de cette méthode est que l'on peut rencontrer des bassins plus compacts qu'un carré ; l'équation n'a alors plus de racines réelles !

A la suite de ces remarques critiques sur l'utilisation du périmètre comme critère de longueur, il a fallu définir d'autres caractéristiques et en particulier :

- la "longueur du plus long thalweg" (l_t). Cette caractéristique n'amène guère de remarques si ce n'est que dans la plupart des cas, on admet qu'il faut poursuivre le thalweg indiqué

sur les cartes topographiques, vers l'amont jusqu'à la limite du bassin. De même, si le cours aval présente des méandres, on curvimètre en général tous les méandres.

- la "distance de l'exutoire au centre de gravité du bassin" (l_g). Ceci paraît être une bonne caractéristique de longueur mais elle nécessite l'évaluation de la position du centre de gravité du bassin ;

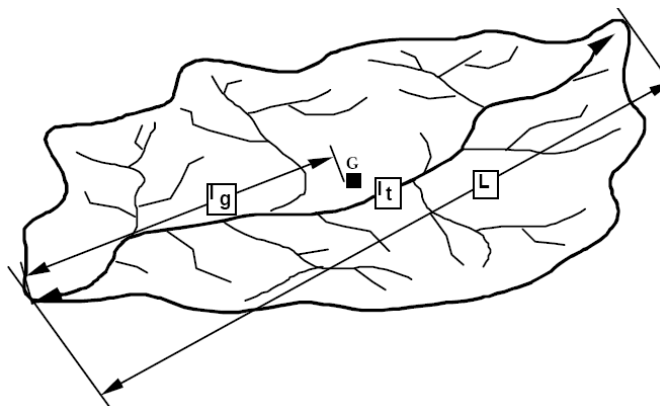


Fig.08 : Caractéristique de longueur d'un bassin versant

la "plus grande longueur entre deux points de la frontière" (L). On utilise cette caractéristique surtout en association avec la "plus grande largeur" (l) perpendiculaire à la plus grande longueur. La caractéristique de forme la plus utilisée est le "coefficient K_c de Gravelius". Il se définit comme le rapport du périmètre du bassin versant au périmètre du cercle ayant même surface (appelée aussi coefficient de capacité) :

$$K_c = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}} = 0,28 \frac{P}{\sqrt{A}}$$

A : surface et P : périmètre du bassin versant

On utilise également pour caractériser la forme d'un bassin, son "rectangle équivalent" (défini plus haut) et le rapport de la plus grande longueur à la plus grande largeur perpendiculaire (voir plus haut).

Enfin, une des façons des plus sophistiquées (mais des plus pénibles) pour caractériser la disposition d'un bassin dans le plan est d'établir la courbe aire-distance. Cette courbe donne la surface s en km^2 (ou en %) qui se trouve à une distance hydraulique supérieure à une valeur donnée d . (La distance hydraulique est la distance parcourue par une particule d'eau qui ruisselle d'un point du bassin jusqu'à l'exutoire.)

III.2.2 - Caractéristiques des altitudes (hypsométrie)

En général, on ne s'intéresse pas à l'altitude moyenne mais plutôt à la dispersion des altitudes.

L'étude statistique permet de tracer la "courbe hypsométrique". Cette courbe donne la surface s (en km^2 ou en % de la surface totale) où les altitudes sont supérieures à une cote h donnée. Cette courbe est établie en planimétrant pour différentes altitudes les surfaces situées au-dessus de la courbe de niveau correspondante. Cette méthode est précise mais fastidieuse.

Une autre consiste à échantillonner les altitudes selon un maillage carré. On admet alors que l'altitude au centre d'une maille est égale à l'altitude moyenne de la maille.

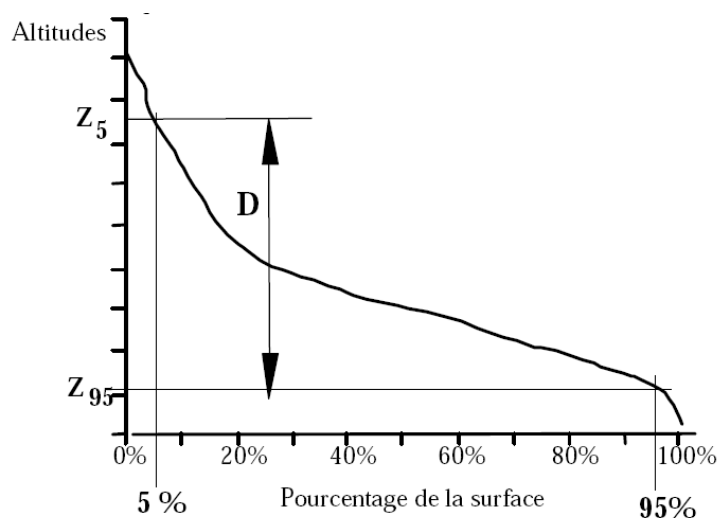


Fig.09 : Courbe hypsométrique

Bien souvent, on définit la "dénivelée D" comme étant la différence de cote entre H5 % et H95 % : $D = H5 \% - H95 \%$

Parfois, on schématise la forme du bassin et la répartition des altitudes sur le rectangle équivalent. On construit alors une surface ayant même hypsométrie, même périmètre et même surface que le bassin versant.

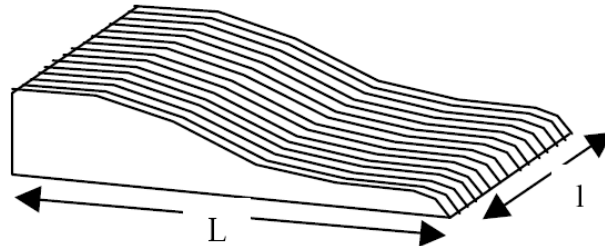


Fig.10 : Rectangle équivalent

III.2.3 - Les indices de pente

L'objet de ces indices est de caractériser les pentes d'un bassin et de permettre des comparaisons et des classifications.

L'idée première qui vient à l'esprit est de caractériser les pentes par leur valeur moyenne I pondérée par les surfaces. Soit D l'équidistance des courbes de niveau, soit d_j la largeur moyenne de la bande j comprise entre les lignes de niveau j et j+1 et soit l_j la longueur moyenne de cette bande. La pente moyenne n_j sur cette bande est : $n_j = \frac{D}{d_j}$

La surface de la bande j est : $d_j \cdot l_j = a_j$

La pente moyenne I pondérée par les surfaces est donc

$$I = \frac{\sum n_j a_j}{\sum a_j} = \frac{\sum \frac{D d_j l_j}{d_j}}{\sum d_j l_j} = \frac{D \sum l_j}{A}$$

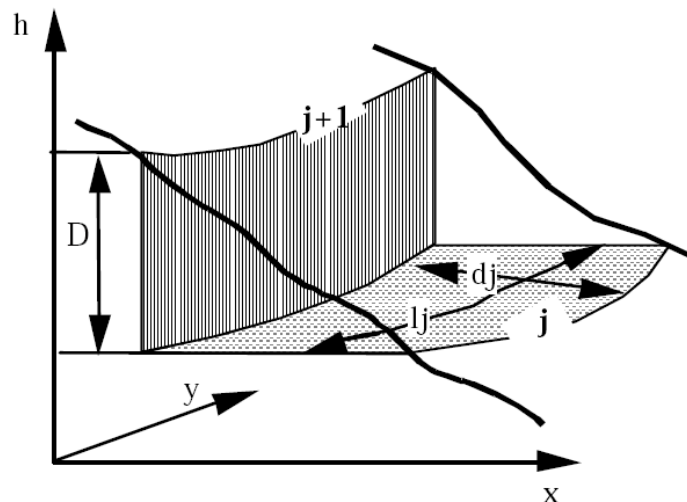


Fig.11 : Calcul de la pente moyenne

Si L_c est la longueur totale des courbes de niveau équidistante de D , la pente moyenne I a pour expression : $I = \frac{DL_c}{A}$

L'estimation de cette expression simple est cependant laborieuse puisqu'il faut curvimétrer toutes les courbes de niveau. Ceci explique que cet indice est peu utilisé dans la pratique.

III.2.3.2 - Indice de pente de Roche I_p

M. ROCHE a proposé un indice de pente plus facile à calculer que le précédent : I_p est la moyenne de la racine carrée des pentes mesurées sur le rectangle équivalent, et pondérée par les surfaces.

La pente moyenne i sur la bande j est : $i_j = \frac{D}{x_j}$

La surface de cette bande est : $a_j = l_j x_j$

d'où l'expression : d'où l'expression :

$$I_p = \frac{\sum_{i=1}^n a_j \sqrt{i_j}}{\sum_{i=1}^n a_j}$$

$$I_p = \frac{\sum l x_j \sqrt{\frac{D}{x_j}}}{A} = \frac{l \sum \sqrt{D} \sqrt{x_j}}{L l} = \frac{\sqrt{D}}{L} \sum \sqrt{x_j}$$

En posant β_j le pourcentage de la surface totale se trouvant entre h_{j+1} et h_j :

$$\beta_i = \frac{x_i}{L} \quad I_p = \frac{\sqrt{D} \sum \sqrt{\beta_i}}{\sqrt{L}}$$

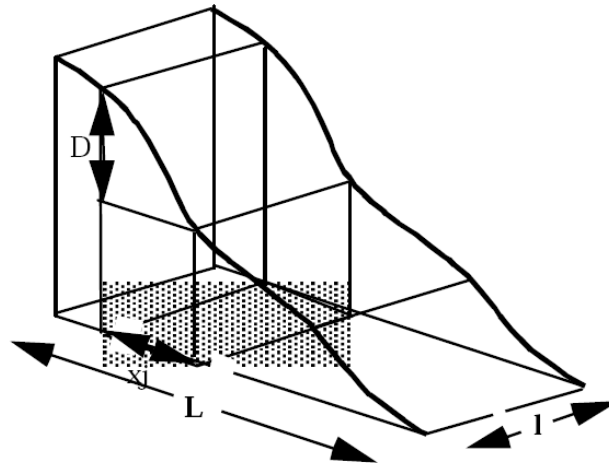


Fig. 12 : Indice de pente de Roche

L'estimation de I_p est plus simple que celle de I puisque l'on travaille sur le rectangle équivalent. Par ailleurs, la valeur de I est peu affectée par le choix de D (une dizaine de classes suffit pour bien estimer I_p).

III.2.3.3 - Indice de pente globale I_g

L'indice de Roche étant cependant trop long à évaluer pour des études rapides, on a proposé un indice encore plus simple : la pente globale... $I_g = \frac{D}{l}$

D étant la dénivelée h5 % - h95 %, définie sur la courbe hypsométrique ou même directement à l'oeil sur la carte topographique ; L étant la longueur du rectangle équivalent. Cet indice, très facile à calculer, est des plus utilisés. Il sert de base à une des classifications O.R.S.T.O.M. pour des bassins versants dont la surface est des l'ordre de 25 km² :

Tab. 03 : Indice de pente globale et type de relief

R ₁	Relief très faible		$I_g <$	0,002
R ₂	Relief faible	0,002	$< I_g <$	0,005
R ₃	Relief assez faible	0,005	$< I_g <$	0,01
R ₄	Relief modéré	0,01	$< I_g <$	0,02
R ₅	Relief assez fort	0,02	$< I_g <$	0,05
R ₆	Relief fort	0,05	$< I_g <$	0,1
R ₇	Relief très fort	0,1	$< I_g$	

Par ailleurs, cet indice simple est étroitement corrélé avec l'indice de pente de Roche ($I_g = 0,8 I_p^2$), avec un coefficient de corrélation de l'ordre de 0,99.

III.2.3.4 - Dénivelée spécifique D_s

L'indice I_g décroît pour un même bassin lorsque la surface augmente, il était donc difficile de comparer des bassins de tailles différentes.

La dénivelée spécifique D_s ne présente pas cet inconvénient : elle dérive de la pente globale I_g en la corrigeant de l'effet de surface admis étant inversement proportionnel à

$$\sqrt{A} : D_s = I_g \sqrt{A} = \frac{D}{L} \sqrt{LI} = D \sqrt{\frac{I}{L}}$$

La dénivelée spécifique ne dépend donc que de l'hypsométrie (D = H5% - H95 %) et de la forme du bassin (I/L).

Elle donne lieu à une deuxième classification de l'O.R.S.T.O.M., indépendante des surfaces des bassins :

Tab.04 : Dénivelée spécifique D_s et type de relief

R ₁	Relief très faible		D _s <	10 m
R ₂	Relief faible	10 m	< D _s <	25 m
R ₃	Relief assez faible	25 m	< D _s <	50 m
R ₄	Relief modéré	50 m	< D _s <	100 m
R ₅	Relief assez fort	100 m	< D _s <	250 m
R ₆	Relief fort	250 m	< D _s <	500 m
R ₇	Relief très fort	500 m	< D _s	

III.2.3.5 - "Reliefs ratios"

Les Anglo-Saxons utilisent d'autres indices de pente IAS que nous ne citerons que pour mémoire :

$$I_{AS} = \frac{\text{plus grande dénivelée}}{\text{plus long thalweg}}$$
$$I_{AS} = \frac{\text{plus grande dénivelée sur le pourtour}}{\text{plus grande longueur du bassin}}$$

III.2.4 - Les Modèles Numériques de Terrain

Depuis les années 1990, la puissance des micros ordinateurs a permis le large développement des Modèles Numériques de Terrain. Sous ce vocable on confond souvent l'ensemble de programme permettant de traiter de la topographie d'une zone (le M.N.T. au sens strict) et les altitudes aux noeuds d'un maillage régulier couvrant la zone d'étude (le Modèle Numérique d'Altitude M.N.A.). A partir d'un M.N.A., le M.N.T. permet de calculer automatiquement tous les paramètres classiques tels que pente, orientation des versants... Il peut également déduire de la topographie et à partir d'un point exutoire donné, retrouver les contours d'un bassin versant, le réseau hydrographique etc. La plus grande difficulté consistait à digitaliser le relief à partir de supports cartographiques. Depuis ces dernières années ces banques de données peuvent être achetées (IGN par exemple), mais on trouve également sur le WEB une couverture totale du monde gratuite.

III.3 - CARACTERISTIQUES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE

Le réseau hydrographique est constitué de l'ensemble des chenaux qui drainent les eaux de surface vers l'exutoire du bassin versant. La définition d'un cours d'eau est difficile à donner avec précision, en particulier pour les cours d'eau temporaires. Selon le support cartographique utilisé, on étudiera le réseau avec plus ou moins de détails : en photographie aérienne, on pourra déceler des thalwegs de très faibles extensions, tandis qu'on ne verra que les cours d'eau pérennes et importants sur une carte au 1/100 000 ème.

L'étude du chevelu hydrographique servant surtout à comparer des bassins entre eux, il suffit, dans la plupart des cas, de se fixer une définition du thalweg élémentaire et de l'appliquer pour l'étude de tous les bassins (par exemple : thalwegs = traits bleus temporaires ou pérennes sur carte I.G.N. au 1/50 000 ème).

Le réseau hydrographique peut se caractériser par trois éléments : sa hiérarchisation, son développement (nombres et longueurs des cours d'eau) et son profil en long.

III.3.1 - Hiérarchisation du réseau

Pour chiffrer la ramification du réseau, chaque cours d'eau reçoit un numéro fonction de son importance. Cette numérotation, appelée ordre du cours d'eau, diffère selon les auteurs. Parmi toutes ces classifications, nous adopterons celle de Strahler :

- tout cours d'eau n'ayant pas d'affluent est dit d'ordre 1 ,
- au confluent de deux cours d'eau de même ordre n, le cours d'eau résultant est d'ordre n + 1 ,
- un cours d'eau recevant un affluent d'ordre inférieur garde son ordre, ce qui se résume par :
 $n + n = n + 1$ et $n + m = \max (n,m)$

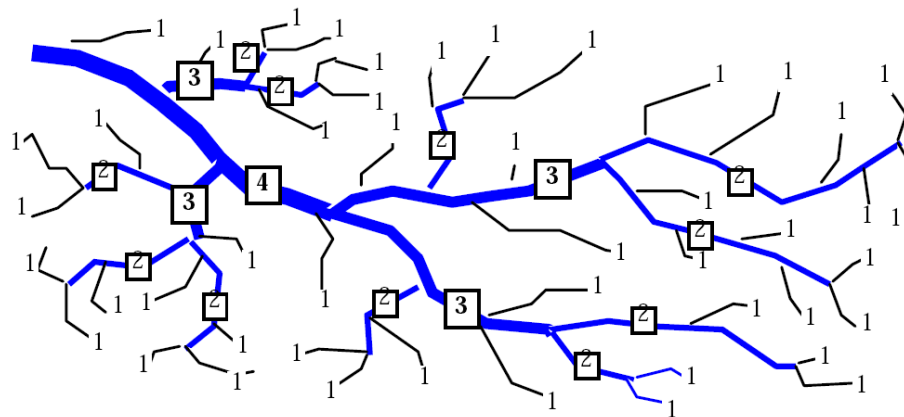


Fig.13 : Classification de Strahler

Comme on le signale plus haut, la définition d'un thalweg peut changer selon le support utilisé. Des études effectuées sur des bassins versants permettent de définir la correspondance moyenne entre l'ordre lu sur la carte et l'ordre réel que révèle la photographie aérienne (selon F. HIRSCH) :

Tab.05 : Classification de F.HIRSCH

Ordre réel	Ordre lu sur la carte	Echelle de la carte
2	1	1/20 000
3	1	1/50 000
4	1	1/100 000
5	1	1/200 000

III.3.2 - Les lois de Horton

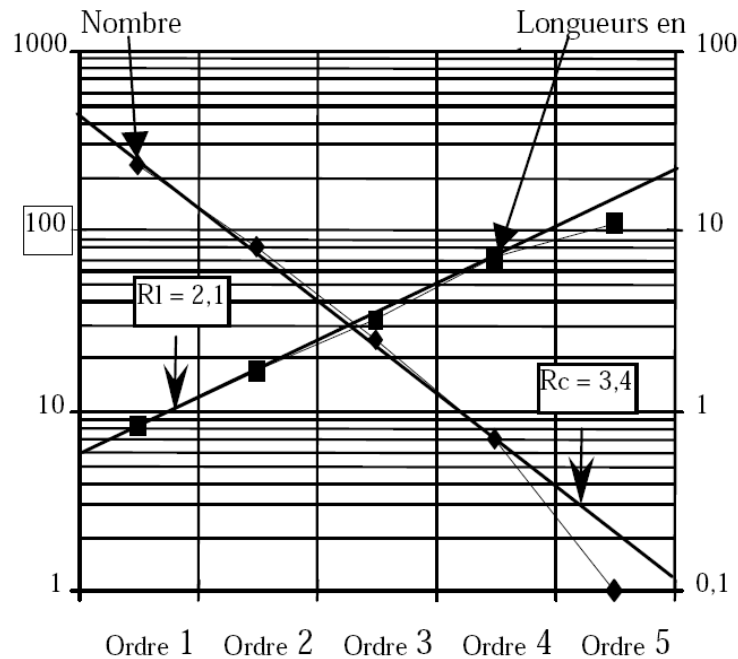
Ces "lois" empiriques relient le nombre, la longueur moyenne et l'ordre des cours d'eau. On constate que pour un bassin versant homogène, le "rapport de confluence" R_c , rapport du nombre N_i de cours d'eau d'ordre i au nombre N_{i+1} de cours d'eau d'ordre $i + 1$, est sensiblement constant :

$$R_c \approx \frac{N_i}{N_{i+1}} \approx \text{Cte}$$

Il en est de même du "rapport des longueurs moyennes" :

$$R_l \approx \frac{l_i}{l_{i-1}} \approx \text{Cte}$$

(l_i : longueur moyenne des cours d'eau d'ordre i).



Fi g.14 : Abaque relie le nombre, la longueur moyenne et l'ordre des cours d'eau

La détermination de R_c et R_l se fait par voie graphique en portant N_i , l_i et i sur un graphique semi logarithmique comme le montre la figure jointe. La pente de la droite moyenne permet de déterminer la raison de la progression géométrique.

III.3.3 - Autres caractéristiques du chevelu

D'autres éléments que R_c et R_l sont pris pour caractériser le chevelu. Parmi ceux-ci, on peut citer :

III.3.3.1 - La densité de drainage D_d

Elle se définit par le rapport de la longueur totale des cours d'eau à la surface du bassin versant :

$$D_d = \frac{\sum l_i}{A} (km^{-1})$$

III.3.3.2 - La fréquence des thalwegs d'ordre 1 : F_1

C'est le rapport du nombre total de thalwegs d'ordre 1 à la surface du bassin versant :

$$F_1 = \frac{N_1}{A} (km^{-2})$$

III.3.3.3 - La courbe aire-distance

Déjà citée comme caractéristique de la forme du bassin, elle tient également compte de la répartition des thalwegs et peut donc être considérée comme une caractéristique du réseau hydrographique.

III.3.3.4 – Endoréisme

On caractérise par ce terme, les réseaux hydrographiques qui ne se relient à aucun autre réseau plus important. Les réseaux endoréiques sont surtout fréquents en zone aride et en zone karstique. On peut distinguer deux types d'endoréisme :

- un endoréisme total où le réseau hydrographique converge vers une zone centrale (ou parfois périphérique) du bassin où apparaît une surface d'eau libre permanente ou non, à partir de laquelle s'évapore la quasi-totalité des apports ;
- un endoréisme du ruissellement. Dans ce cas, le réseau de drainage aboutit à une zone où l'eau s'infiltré et poursuit son écoulement vers l'extérieur du bassin par les nappes.

III.3.4 - PROFILS EN LONG

Ces profils sont établis en portant en abscisses les longueurs développées à partir d'un point de référence et en ordonnées les cotes de l'eau dans le cours d'eau principal et dans ces affluents (parfois on donne la cote du fond). Ces profils sont parfois disponibles lorsque la navigation, où les besoins en hydroélectricité ont nécessité des études. Mais dans la plupart des cas, on devra faire ce relevé, soit par nivellement sur le terrain, soit plus sommairement à partir des cartes topographiques.

Les profils en long permettent d'estimer la pente moyenne du cours d'eau. Cette pente moyenne sert surtout dans l'évaluation des temps de concentration d'un bassin versant, ce temps de concentration étant lié à la vitesse de propagation des particules fines ; elle-même proportionnelle à \sqrt{i} . On calcule généralement la pente moyenne I d'un cours d'eau par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{\sqrt{i_j}}$$

Dans cette formule, le cours d'eau de longueur totale L est découpé en n tronçons j où la pente i_j est constante sur une longueur l_j .

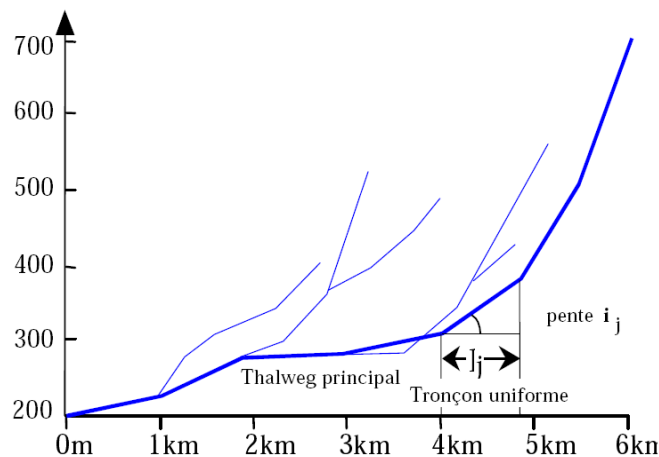


Fig.15 : Exemple d'un profil a long

III.4 - CARACTERISTIQUES GEOLOGIQUES

La géologie d'un bassin versant est un facteur très important du régime des cours d'eau qui drainent ce bassin. En période de crue, les volumes écoulés seront d'autant plus grands que le bassin sera plus imperméable. En période de basses eaux, les débits seront d'autant plus forts que les nappes sont plus nombreuses et importantes.

Enfin, la géologie influe indirectement sur l'évapotranspiration par l'effet thermique dû à la couleur des sols et par le développement de la végétation en fonction des sols (albédo).

On se contente généralement de caractériser la géologie d'après le comportement hydrogéologique du bassin. L'O.R.S.T.O.M. a proposé une classification en cinq groupes ainsi définis :

Tab.06 : Classification du bassin selon la nature géologique

Classe	Intitulé	Exemple
P1	Perméable à aquifère drainant ou non drainé	Formation gréseuse dont les exutoires sont à l'extérieur du bassin
P2	Perméable à aquifère drainé	Formation gréseuse dont les sources alimentent le réseau
P3	Perméabilité moyenne ou faible	Alternance de marnes et calcaires
P4	Karstique	Formation calcaire, perméabilité de fissures et développement d'un réseau souterrain
P5	Imperméable	Terrain marneux, cristallin, <i>etc.</i>

III.5 - LE COUVERT VEGETAL

Le couvert végétal influe beaucoup sur les quantités d'eau disponibles pour l'écoulement de surface. En effet, l'évapotranspiration par les végétaux est très importante et elle varie selon la nature des végétaux (forêts, cultures, prairies, *etc.*).

Par ailleurs, la végétation joue également un rôle atténuateur important en période de crue : en effet, lorsque la végétation est développée, le ruissellement est retardé et la pointe de crue est atténuée. Par ailleurs, l'écoulement étant plus long, la part d'eau reprise par l'évapotranspiration augmente et le volume de la crue diminue.

Pour caractériser le couvert végétal, on utilise le pourcentage des surfaces occupées par chaque type de végétation.

Sous nos climats, on se contente de trois classes : forêt, cultures, pâturages et friches. (Parfois même, on ne retient que le pourcentage des forêts.). Cette classification est évidemment à adapter pour d'autres climats (par exemple sols nus, savanes, forêts, galeries, rizières, *etc.*). La détermination des surfaces occupées par chaque type de végétation est

difficile car les documents cartographiques les mentionnant sont rares et bien souvent dépassés.

III.6 - CARACTERISTIQUES GLACIOLOGIQUES

Dans certains cas particuliers, le bassin versant peut être envahi en partie par des glaciers ou des manteaux neigeux permanents. Pour caractériser ceci, on utilise bien souvent le pourcentage et la surface occupée par les neiges et les glaciers.

IV - L'ATMOSPHERE

L'atmosphère joue un rôle essentiel dans l'apparition de phénomènes hydrologiques. Le comportement de l'atmosphère nous intéresse à trois niveaux :

- L'atmosphère constitue un stock d'air et d'eau. L'eau de l'atmosphère est sous forme de vapeur, sous forme liquide (fines gouttelettes) ou sous forme solide (cristaux de glaces en suspension). Cependant, on admet que la hauteur d'eau moyenne condensable ne représente qu'environ 20 mm.
- La terre est soumise à des échanges continuels d'énergie avec l'espace. L'atmosphère constitue un collecteur de chaleur provenant soit du soleil, soit du sol. Les échanges varient d'une façon très importante en fonction du temps (à l'échelle saisonnière et à l'échelle journalière) et aussi en fonction du lieu. Ces différences provoquent des mouvements importants des masses d'air (et d'eau).
- L'atmosphère joue donc un rôle de transport d'eau. Les vitesses de ces transports varient de quelques dizaines de kilomètres par heure au sol à plus de 400 km/h pour les "jet-streams" en altitude. Nous allons évoquer successivement ces trois rôles joués par l'atmosphère.

IV.1 - CONSTITUTION DE L'ATMOSPHERE

On peut caractériser l'atmosphère par sa composition, sa pression et sa température. A partir de ces trois éléments, on pourra expliquer la plupart des phénomènes atmosphériques.

Avant d'aborder la description de ces trois paramètres, il convient de faire les remarques suivantes :

- l'atmosphère est de très faible épaisseur :
 - la moitié de la masse atmosphérique est renfermée dans les cinq premiers kilomètres,
 - les 9/10 sont dans les vingt premiers kilomètres,
 - enfin, il ne reste que moins du millième de la masse totale au-delà de 60 km d'altitude ;
- les gradients verticaux sont beaucoup plus forts que les gradients horizontaux (de 1 000 à 10 000 fois pour les températures et les pressions) ;
- Les écoulements aériens sont essentiellement horizontaux mais les singularités topographiques peuvent perturber gravement ces écoulements.

Par la suite, on pourra ne s'intéresser qu'à ce qui se passe dans les quinze premiers kilomètres d'altitude.

IV.1.1 - Composition de l'atmosphère

Comme nous l'avons déjà dit, l'atmosphère est un mélange d'air et d'eau en proportion variable.

IV.1.1.1 - Atmosphère sèche

En absence d'eau, on admet que la composition moyenne la plus probable est la suivante :

Tab.07 : Composition de l'atmosphère à l'état sèche

Eléments	Volume %	Environ %
N	78,09	78 %
O	20,95	21 %
A _r	0,93	1 %
CO ₂	0,03	
N _e	1,8.10 ⁻³	
H _e	5,2.10 ⁻⁴	
K _r	1,0.10 ⁻⁴	
H	5,0.10 ⁻⁵	
X _e	0,8.10 ⁻⁶	

Cette composition est pratiquement invariable et l'atmosphère sèche peut être assimilée à un gaz parfait de masse moléculaire $M = 29$ g (1,29 kg/m³ dans les conditions standards).

IV.1.1.2 - Mélange air-eau

A ce "gaz parfait" s'ajoute la vapeur d'eau en quantité très variable. La pression partielle de la vapeur d'eau dans ce mélange est appelée "tension de vapeur". Elle ne peut, théoriquement, dépasser un certain seuil, appelé "tension de vapeur" saturante, qui ne dépend que de la température.

Tab.08 : Tension de vapeur selon la température

Température (° C)	-20	-10	0	10	20	30
Tension de vapeur saturante (en mm de Hg)	0,78	1,96	4,58	9,21	17,5	31,8
Masse d'eau sous forme vapeur (en g/m ³)	0,89	2,16	4,85	9,42	17,3	30,4

Au-delà de ce seuil, il y aura condensation sous forme de fines gouttelettes et création de nuages. La condensation d'un gramme d'eau libère 600 calories, ce qui permet d'élever de 16 °C un mètre-cube d'air dans les conditions standards.

Le passage de ce même gramme d'eau à l'état solide à 0°C ne libère que 80 calories.

Enfin, à 0°C, la chaleur latente de sublimation de la glace est de 675 cal/g.

Dans le détail, on constate de légères différences de tension de vapeur saturante e_s pour les températures inférieures à zéro degré selon que l'on est en présence d'eau surfondue ou de cristaux de glace. Cette différence est maximale vers -10°C où l'on a :

$$e_s(\text{eau surfondue}) - e_s(\text{cristaux de glace}) \approx 0,27 \text{ millibar}$$

Cette constatation sera utilisée plus loin pour expliquer le déclenchement des précipitations.

Pour caractériser le mélange air-eau, on utilise différents paramètres dont :

*** l'humidité absolue h_a :**

C'est la masse de vapeur d'eau par unité de volume. Avec les unités habituelles en climatologie, on a la relation : $h_a = 217 \frac{e}{T}$

h_a : en g/m³, e : tension de vapeur en millibar, T : température absolue

*** l'humidité relative h_r :**

C'est le rapport de la tension de vapeur effective e à la tension de vapeur saturante e_s :

$$h_r = \frac{e}{e_s} = \frac{h_a}{h_{a \text{ saturante}}}$$

*** le rapport de mélange r :**

Rapport de la masse de vapeur d'eau à la masse d'air sec. Il peut s'exprimer sous la forme :

$$r = 622 \frac{e}{P_a - e} \quad r : \text{en g/kg}$$

Les valeurs de r sont très variables puisqu'elles oscillent entre 0,5 g/kg pour les airs secs et froids arctiques à 25 g/kg pour un air tropical humide.

*** le point de rosée T_r :**

C'est la température à laquelle un mélange à r et P donné devient saturé.

IV.1.2 - Champ vertical des pressions

En général, les pressions décroissent exponentiellement avec l'altitude. Dans nombre de problèmes pratiques, on utilisera la notion d'atmosphère standard voisine des conditions moyennes.

A cette atmosphère standard se superposent des variations en fonction du temps. Ces variations sont de deux types :

- Des variations diurnes régulières de l'ordre de quelques millimètres et analogues à une double marée journalière ;
- Des variations irrégulières dues aux passages des perturbations et dont l'amplitude dépasse souvent 10 mm de Hg.

Pour rendre compte de l'évolution des pressions, on est amené à tracer des cartes isobares, cartes qui donnent le lieu des points d'égale pression au sol (ramené au niveau de la mer).

Pour étudier les phénomènes météorologiques, il faut également connaître la pression en fonction de l'altitude ; aussi utilise-t-on des isohypses qui sont des lignes de niveau des surfaces isobares (700, 500, 300 millibars).

Pour l'hydrologue intéressé par l'étude des pluies de front qui, on le verra plus loin, prennent naissance vers 3.000 m, on utilisera les isohypses de 700 millibars. Par contre, pour les problèmes de grêle qui apparaissent vers 5.000 m, on utilisera les isohypses de 500 millibars.

IV.1.3 - Champ vertical des températures

IV.1.3.1 - Champ vertical moyen

Les phénomènes météorologiques qui nous intéressent se déroulent dans les couches basses de l'atmosphère, situées en dessous de la "tropopause". Cette surface limite, vers 12 km d'altitude, la "troposphère" de la "stratosphère". (Au-delà de 80 km, on rentre dans "l'ionosphère"). La "couche turbulente" (ou couche géographique) constitue les trois premiers kilomètres. Dans cette zone, les températures varient "n'importe comment". Au-delà, on observe jusque vers 10 km, une décroissance des températures avec un gradient de 0°5 C à 0°65 C par 100 m. Cependant, cette décroissance moyenne supporte des exceptions et on peut même rencontrer assez fréquemment des "inversions de température" (croissance de la température avec l'altitude).

Les variations de gradients des températures dans la troposphère peuvent être très rapides (sur 1/4 d'heure à 1/2 heure).

Les profils de températures sont enregistrés lors de lâcher de ballons-sondes.

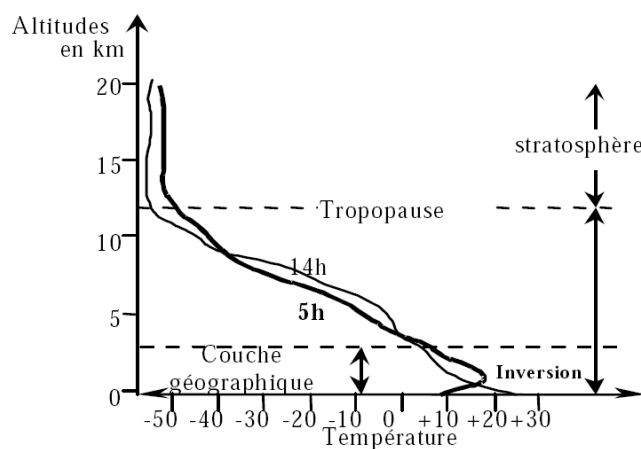


Fig.16 : Variations de gradients des températures dans l'atmosphère

IV.1.3.2 - Gradient vertical de l'adiabatique sèche

Supposons que l'on déplace adiabatiquement une particule d'air sec. Nous pouvons appliquer à ce "pseudo-gaz parfait" les lois de la thermodynamique. On trouve alors que le gradient vertical est sensiblement constant et de l'ordre de $-1^\circ \text{C}/100 \text{ m}$. Ce résultat est encore valable pour un mélange air-eau non saturé.

IV.1.3.3 - Gradient vertical de l'adiabatique humide

Si l'air maintenant est saturé en eau (présence d'eau liquide), il y aura évaporation ou condensation lors des variations de température. La chaleur latente de changement d'état jouera un rôle modérateur et les gradients seront plus faibles. A la différence de l'adiabatique sèche, le gradient de l'adiabatique humide dépend à la fois de la température et de la pression (donc de l'altitude). Il croît avec la température et décroît avec la pression.

IV.1.3.4 - Gradient vertical du point de rosée

A mélange constant, le point de rosée varie avec l'altitude. Le gradient vertical est de l'ordre de $-0.2^\circ \text{C}/100 \text{ m}$.

IV.1.4 - Stabilité et instabilité atmosphérique

Sur le graphique température altitude, les adiabatiques sèche et humide délimitent trois zones numérotées de 1 à 3. Selon la position du gradient réel de température, on prévoit la stabilité ou l'instabilité de l'air.

- Si le gradient de température se situe dans la zone 1, un élément de volume qui serait entraîné vers le haut suivrait, soit l'adiabatique sèche, soit l'adiabatique humide, mais dans chaque cas, il se trouverait à une température supérieure à celle de l'air ambiant, donc plus léger. Il apparaît alors une force qui tend encore à faire monter cet élément de volume.

Dans la zone 1, il y a toujours instabilité atmosphérique.

- Dans la zone 3, un élément de volume entraîné vers le haut se refroidit selon l'adiabatique sèche ou humide, mais toujours moins vite que l'air ambiant. Donc, la particule que l'on a élevée se trouve plus froide donc plus lourde que l'air ambiant. Il apparaît une force tendant à ramener vers le bas cette particule. Dans la zone 3, il y a toujours stabilité atmosphérique.
- Enfin, dans la zone 2, et conformément aux raisonnements précédents, si l'air est saturé, il se refroidit moins vite que l'air ambiant ; il y a instabilité. Si l'air est sec il se refroidit plus vite et il y a stabilité. Dans la zone 2, il y a instabilité conditionnelle, air sec stable et air saturé instable.

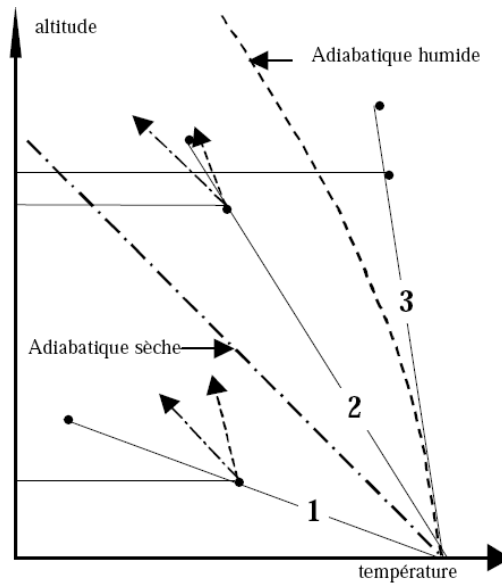


Fig. 17 : Stabilité et instabilité de l'air

IV.1.5 - Etude des précipitations

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé que lorsque l'air devenait saturé, l'eau liquide qui apparaissait restait dans l'élément de volume. Ceci n'est valable que dans la mesure où les gouttelettes peuvent rester en suspension. Si ce n'est pas le cas, il y a apparition de précipitations (sous forme liquide ou solide).

IV.1.5.1 - Les nuages

Le nuage est un aérosol pouvant être constitué d'air, de vapeur d'eau, de gouttelettes d'eau liquides et de cristaux de glace. Les dimensions des gouttelettes sont très faibles. On admet que leur diamètre est de l'ordre de 5 à 30 μ et leur espacement de 1 mm. Leur vitesse de chute en air calme serait de quelques millimètres par seconde ; or, les nuages sont animés de turbulences dont les vitesses instantanées sont sans aucune commune mesure (plusieurs mètres par seconde).

Pour qu'il y ait chute des particules d'eau, il faut que leur vitesse soit très nettement supérieure à la vitesse des courants ascendants. Sur la figure jointe, on constate que les gouttes doivent avoir au moins un diamètre de 0,5 mm pour pouvoir provoquer une pluie.

Pour former une goutte de pluie, il faut donc environ 10^6 gouttelettes élémentaires.

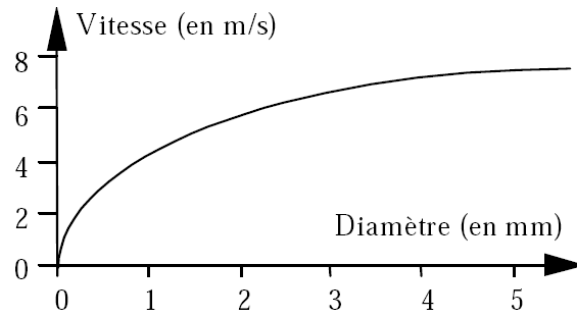


Fig.18 : Relation entre vitesse et diamètre des gouttelettes

IV.1.5.2 - Déclenchement des précipitations

L'agglomération des gouttelettes se ferait selon le schéma suivant (le plus probable et le plus généralement admis) :

Supposons un "nuage froid" dans lequel on rencontre à la fois des cristaux de glace et de l'eau surfondue. La tension de vapeur saturante étant différente dans ces deux cas, la goutte d'eau surfondue va se vaporiser au profit des cristaux de glace. TOR-BERGERON ont pu montrer qu'à -10° , toute l'eau liquide d'un nuage peut se réunir en 20 mn sur les cristaux de glace lorsque leur densité est de 1 cristal/cm³. On obtient ainsi des gouttes de 0,1 mm environ de diamètre.

Dans les autres cas où il n'y a pas présence de cristaux de glace, on pense que le phénomène est analogue à celui décrit par TOR-BERGERON. Le rôle des cristaux serait joué par des germes tels que des cristaux de sel, des poussières, *etc.*

Eventuellement, les différences de température entre les gouttelettes pourraient également expliquer une condensation préférentielle à partir des gouttes "chaudes" sur les "froides".

Ainsi, les gouttes peuvent atteindre un diamètre de 0,1 mm et acquérir une vitesse de chute suffisante pour grossir par "balayage" d'autres gouttelettes. La goutte ainsi amorcée va augmenter de volume lors de sa chute et accroître sa vitesse.

IV.1.5.3 - Entretien des précipitations

L'étude des précipitations montre que le schéma simpliste selon lequel les nuages prendraient naissance au-dessus des océans, puis poussés par les vents tomberaient en pluie sur les continents, est faux.

En effet, on peut admettre qu'un nuage ayant pris naissance au-dessus de l'Atlantique déverse environ 100 mm sur l'Europe et la Russie Occidentale avant de se dissiper au-delà de l'Oural. Or, un nuage ne contient au maximum que 20 mm d'eau environ. Ce n'est donc qu'au plus 20 mm qui proviennent des océans et 80 mm qui viennent de l'atmosphère au-dessus des continents.

Par ailleurs, on constate des averses dépassant fréquemment 20 mm. Il faut donc que le nuage soit continuellement ré-alimenté en eau.

Ceci se produit lorsqu'il y a des vents ascendants qui entraînent des masses d'air humide mais non saturé vers la zone de formation du nuage. De telles conditions se présentent lorsque l'on rencontre un ou plusieurs de ces trois cas principaux :

IV.1.5.3.1 Précipitations de convection :

Si une masse d'air se réchauffe au voisinage du sol, le profil de température va évoluer en augmentant son gradient et en tendant vers la zone 1 du §.IV.1.4. Il y aura alors instabilité et apparition de cellules de convection. L'air humide et chaud va monter, se détendre et se refroidir. Lorsque le point de rosée est atteint, il se forme un nuage (cumulus) et si l'ascendance est suffisante, on pourra atteindre une altitude suffisante pour déclencher les précipitations.

Ce type de pluie correspond à la plupart des précipitations des régions équatoriales ; on le rencontre également en climat tempéré sous forme d'orages d'été.

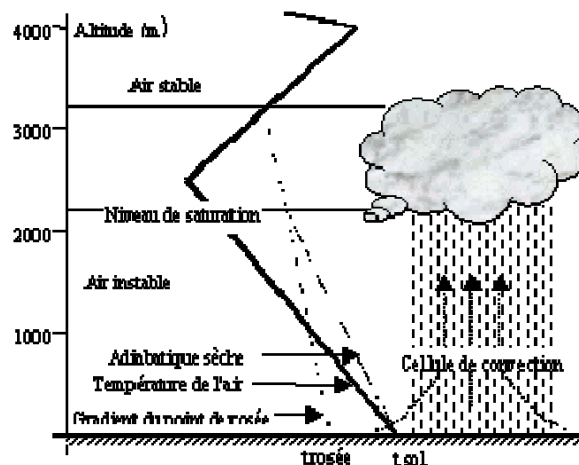


Fig. 19 : Précipitations de convection

IV.1.5.3.2 Précipitations orographiques

Si une masse d'air se déplaçant horizontalement rencontre un obstacle topographique (chaîne de montagnes par exemple), il s'ensuit une élévation des masses d'air et par conséquent leur refroidissement. Comme précédemment, on obtient des précipitations sous forme de pluie mais aussi, si l'altitude est suffisante, de la neige. Après le passage de la chaîne, l'air va redescendre, se comprimer et se réchauffer. On a alors des vents chauds et secs (effet de "foehn").

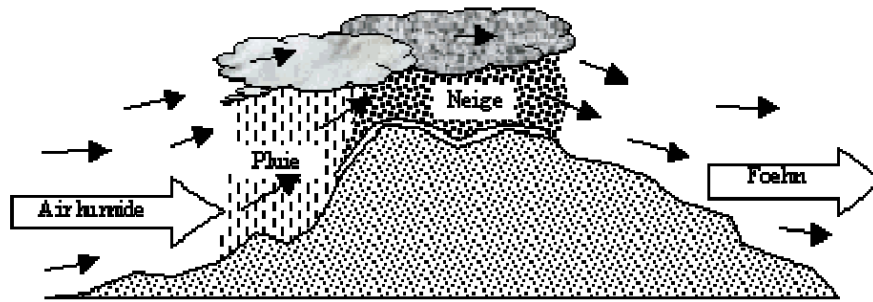


Fig.20 : formation des précipitations orographiques

IV.1.5.3.3 Précipitations de front :

Lorsque plusieurs masses d'air de propriétés différentes se rencontrent, les plus chaudes et les plus humides sont poussés vers les hautes altitudes où elles se refroidissent et se condensent.

Ce sont ces précipitations qui sont les plus importantes, les plus longues et les plus fréquentes sous nos climats tempérés.

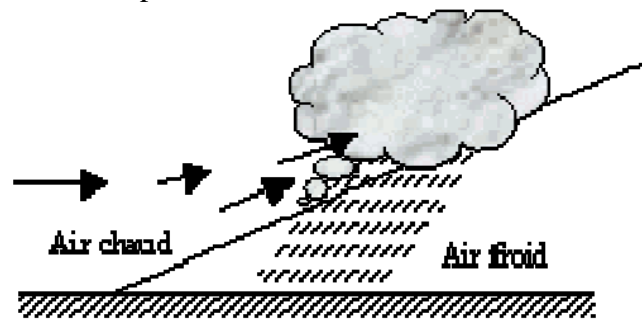


Fig .21 : Formation des précipitations de front

IV.1.5.4 - Précipitations solides

Elles se produisent essentiellement sous deux formes :

IV.1.5.4.1 La grêle :

Elle se forme dans les cumulo-nimbus vers 5 000 m d'altitude avec de fortes turbulences.

Les quantités d'eau surfondues que peuvent contenir ces nuages se solidifient brusquement au contact de cristaux de glaces. Ce phénomène est relativement mal connu. Son extension géographique est généralement faible (par exemple : 1 à 2 km sur 10 à 15 km).

IV.1.5.4.2 La neige :

C'est la principale forme de précipitations solides. Elle résulte d'une condensation lente et progressive de la vapeur d'eau à une température voisine de 0° C. Cette condensation se fait initialement en cristaux en forme d'étoile à six branches. Si les cristaux subissent une fusion partielle, ils s'agglomèrent au cours de leur chute pour former les flocons.

IV.2 - L'ATMOSPHERE, COLLECTEUR DE CHALEUR

L'atmosphère joue un rôle de collecteur de chaleur en captant sélectivement les radiations venant du soleil ou de la terre.

IV.2.1 - L'énergie solaire

Le soleil émet une énergie sensiblement constante. Le flux moyen à travers une surface normale aux rayons solaires, située à la limite supérieure de l'atmosphère, est appelé la "constante solaire".

A la distance moyenne terre-soleil (149.106 km), on admet que cette constante est de 1,396 kW/m².

Dans le temps, l'énergie solaire arrivant aux confins de l'atmosphère subit des variations :

- saisonnières qui sont dues d'une part à la modification de la distance terre-soleil entre l'hiver et l'été et d'autre part, à la variation de l'incidence moyenne des rayons solaires. (Ces variations se contrarient en partie.) ;
- journalières dues à l'incidence variable des rayons solaires durant le jour et à leur absence durant la nuit.

Ce flux d'énergie est composé de radiations de différentes longueurs d'ondes (comparable au rayonnement d'un corps noir à 6000° K). Le spectre s'étend très largement de l'ultraviolet à l'infrarouge. On peut admettre la répartition suivante des puissances émises : 8 % dans l'ultraviolet ($L < 0,4 \mu$), 41 % dans la visible ($0,4 < h < 0,7 \mu$) et 51 % dans l'infrarouge ($h > 0,7\mu$).

IV.2.2 - Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère

Ce n'est qu'une faible partie de l'énergie solaire qui arrive au sol après avoir traversé l'atmosphère. Cette diminution est due d'une part à l'absorption et à la diffusion d'autre part.

La "diffusion" est due aux divers constituants de l'air (diffusion moléculaire surtout pour les faibles longueurs d'ondes), aux particules en suspension dans l'air (dans toutes les gammes de longueurs d'ondes), et aux nuages.

L'importance de la diffusion dépend surtout de l'épaisseur d'atmosphère traversée et de la nébulosité. Une partie du rayonnement solaire est diffusée vers l'espace et l'autre vers le sol (radiation diffuse). L'affaiblissement est au minimum de l'ordre de 10 % et peut atteindre 60 %.

L'absorption d'énergie est assez sélective. On constate que les couches hautes de l'atmosphère riche en ozone absorbent une très grande partie des rayonnements ultraviolets.

La vapeur d'eau, elle, absorbe principalement les radiations infrarouges. Enfin, les gouttelettes d'eau des nuages et les poussières, constituent un tapis très absorbant et contribuent au réchauffement de la base de l'atmosphère.

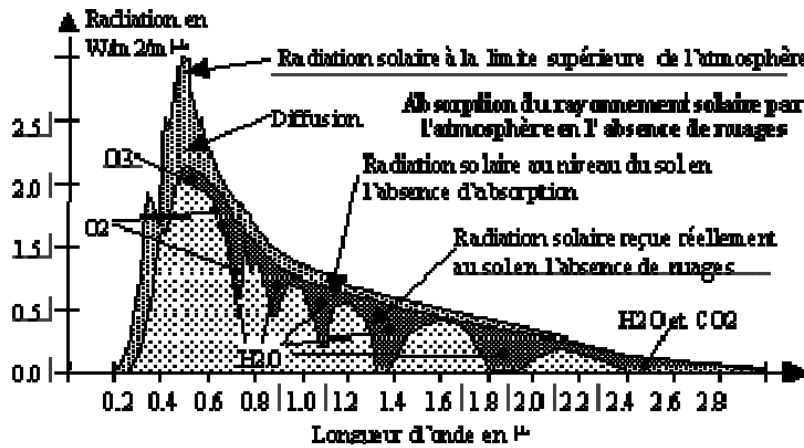


Fig . 21 : Diffusion et absorption de l'énergie solaire dans l'atmosphère

Sur l'ensemble de l'énergie solaire, on peut retenir la répartition suivante des énergies :

- 43 % sont interceptés par l'atmosphère puis diffusés vers l'espace et constituent "l'albédo" de la terre ;
- 12 % sont transformés en chaleur par la vapeur d'eau ;
- 5 % sont absorbés par l'ozone, le CO₂, les poussières et les nuages ;
- 40 % arrivent au sol et représentent la radiation globale (radiation directe + radiation diffuse).

IV.2.3 - Rayonnement terrestre

La terre émet en permanence un rayonnement propre surtout dans l'infrarouge. Celui-ci est de faible puissance (au maximum de l'ordre de 0,35 kW/m²) et se trouve en presque totalité absorbé par l'humidité de l'atmosphère. Durant le jour, la terre émet un rayonnement réfléchi qui peut varier grandement selon la nature du sol (albédo = $\frac{\text{rayonnement réfléchi}}{\text{rayonnement incident}}$) :

Sol Albédo	Neige 0,50 à 0,90	Sol cultivé 0,07 à 0,14	Mer 0,05 à 0,40
---------------	----------------------	----------------------------	--------------------

IV.3 - CIRCULATION GENERALE DANS L'ATMOSPHERE

L'ordre de grandeur de l'énergie disponible au sol est donc la suivante :

- puissance reçue à la limite supérieure de l'atmosphère : $1,396 \cdot \pi R^2$
- puissance moyenne par une unité de surface terrestre $0.14 \text{ kW/m}^2 \cong 0.4 \frac{1.396 \pi R^2}{4 \pi R^2}$

Cette énergie est à la base de toutes les phases du cycle hydrologique : évaporation, transport, condensation, précipitations.

Cette énergie disponible est cependant très variable en fonction du lieu (différence d'albédo de la terre, latitude => incidence des rayons solaires) et du temps (nébulosité, jour et nuit, saisons). Il en résulte des différences de pressions de température et d'humidité entre les masses d'air et par conséquent des déséquilibres entraînant le mouvement des masses d'air.

IV.3.1 - Les pressions et les vents

IV.3.1.1 - Répartition méridienne

L'étude de la répartition moyenne des précipitations a conduit à un modèle de circulation moyenne méridienne constitué de trois cellules dans chaque hémisphère séparées par des fronts comme l'indique les figures suivantes.

IV.3.1.2 - Influence de la rotation terrestre

Au schéma précédent se superpose l'effet de la rotation de la terre. En effet, tout corps en mouvement à la vitesse V subit une force F_c , appelée force de Coriolis, due à la rotation de la terre : $\vec{F}_C = -2\vec{\Omega}\vec{V}$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur de rotation instantané ($\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ rad/s).

Il en résulte que les vents n'ont plus une direction méridienne mais, dans l'hémisphère nord, sont détournés vers leur droite.

Le schéma précédent se modifie pour aboutir à celui de la figure ci-après qui se caractérise ainsi dans l'hémisphère nord :

- une zone de basses pressions équatoriales siège d'ascendance constante et alimentée par des vents au sol, les "alizés", de secteur E-N-E ;
- une zone hautes pressions subtropicales où redescendent les masses d'air équatoriales, transportées par des vents d'altitude, les "contre-alizés", de secteur W-S-W ;
- une zone de hautes pressions polaires (entre les latitudes 60° N et le pôle) ;
enfin, entre les latitudes 40° et 60°, une zone où l'écoulement se fait vers l'est, la zone des "Westerlies". A partir des frontières de cette zone (front polaire et front tropical), des masses d'air froid ou chaud pénètrent dans les westerlies et provoquent des perturbations qui se propagent vers l'est. Les surfaces de discontinuité entre ces masses d'air forment des fronts dont le passage détermine les changements de type de temps dans les régions tempérées.

IV.3.1.3 - Influence de la répartition des terres et des océans

A ce schéma général vient se superposer l'influence de la répartition des terres et des océans. En effet, l'inertie thermique des terres est plus faible que celle des océans. En hiver, les continents sont relativement plus froids et en été plus chauds. L'hiver, les centres de hautes pressions sont plus intenses sur les continents (continent Nord-Américain et Sibérie) ; en été au contraire, le front polaire remonte vers le nord et les centres de dépression se renforcent sur les continents.

V - MESURES LIEES A L'ESTIMATION DE L'EVAPORATION ET DE L'EVAPOTRANSPIRATION

Le retour de l'eau à l'atmosphère peut se faire de différentes manières, soit directement par évaporation à partir d'une surface d'eau libre (mer, lac, cours d'eau, *etc.*), soit le plus souvent à partir d'un sol ou par l'intermédiaire des végétaux. On parle dans ce deuxième cas d'évapotranspiration. Pour l'évaporation, la quantité d'eau qui repart dans l'atmosphère dépend uniquement des paramètres physiques tels que la température de l'air, de l'eau, de la vitesse du vent, du degré hygrométrique, de l'ensoleillement, *etc.* L'évapotranspiration, elle, dépend en plus du couvert végétal et de son stade de développement ; sa mesure en est rendue d'autant plus difficile.

V.1 - MESURE DES PARAMETRES PHYSIQUES CONDITIONNANT L'EVAPORATION

Ces mesures sont généralement faites par les services météorologiques. Cependant, dans certains cas particuliers, les données ne sont pas disponibles à proximité du site envisagé ; dans ce cas, l'hydrologue peut être amené à installer des stations climatologiques plus ou moins complètes.

Il faut noter qu'il existe de grandes différences dans les appareils de mesures. Lorsqu'ils sont destinés à équiper des stations du type synoptique, on rencontre des appareils très précis mais nécessitant entre autres un important investissement, des sources d'énergie électrique et un personnel compétent. Au contraire, pour les stations tertiaires que l'hydrologue peut être amené à installer, il convient de mettre l'accent sur la robustesse et l'autonomie d'appareils destinés bien souvent à être "abandonnés" durant des semaines.

V.1.1 - Mesure des températures

Un thermomètre quel qu'il soit ne mesure que sa propre température. Il faut donc prendre un soin particulier pour qu'il soit en équilibre thermique avec le milieu dont on veut mesurer la température. Que ce soit pour la mesure de la température de l'air ou de l'eau, il convient donc de protéger l'appareil des rayonnements solaires directs ou indirects.

L'air étant un très mauvais conducteur de la chaleur, il faut renouveler l'air au contact du thermomètre ; l'abri devra donc être aéré. Sous nos climats, la ventilation naturelle à travers des parois à persiennes est considérée comme suffisante. Par ailleurs, l'abri sera peint en blanc, brillant si possible, de façon à limiter son échauffement. Enfin, la mesure de température se fera à environ 1,5 m du sol.

Pour les besoins de l'hydrologie, un thermomètre à mercure à $0,1^{\circ}\text{C}$ est suffisamment précis, mais pour obtenir des températures moyennes journalières ou mensuelles, il nécessiterait des relevés trop fréquents.

On peut alors utiliser des thermomètres à maxima et minima :

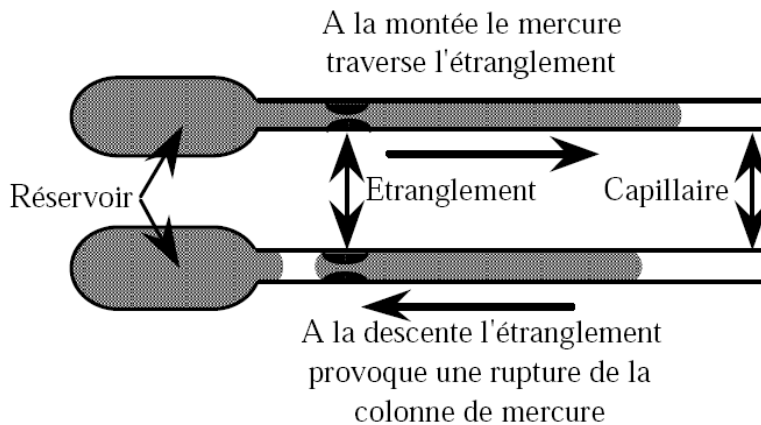


Fig.22 : Schéma simplifié d'un thermomètre à maxima

Le thermomètre à maxima est un thermomètre à mercure présentant un étranglement à la sortie du réservoir. Lorsque la température augmente, le mercure le franchit aisément. Par contre lorsque la température décroît, le mercure se fractionne et maintient donc l'indication de la température maximale atteinte. Pour la bonne marche de l'appareil, il convient de l'installer dans une position voisine de l'horizontale (environ 2°). Pour réduire le fractionnement après la lecture, il suffit de "centrifuger" à la main l'appareil.

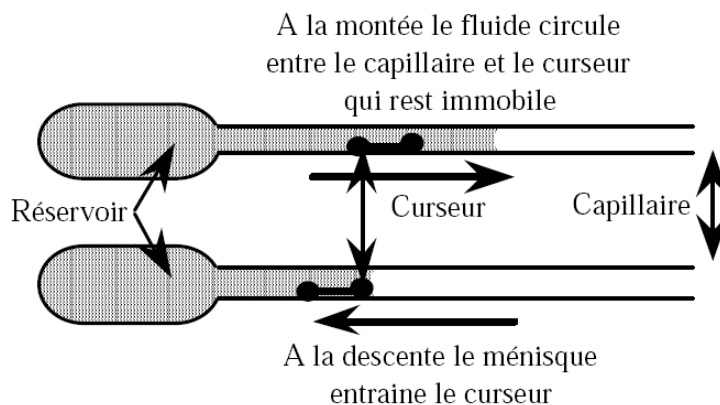


Fig.23 : Schéma simplifié d'un thermomètre à minima

Le thermomètre à minima est généralement un thermomètre à alcool dont le capillaire contient un petit index mobile se déplaçant librement. Si la température augmente, l'alcool monte dans le capillaire en s'écoulant autour de l'index qui ne bouge pas. Par contre si la température baisse, l'alcool va s'écouler autour de l'index jusqu'à ce que le ménisque

l'atteigne. Les forces de capillarité sont alors suffisantes pour que le ménisque entraîne l'index dans sa descente.

On constate généralement que la température minimale est atteinte quelques temps avant le lever du soleil alors que la température maximale s'observe vers midi au soleil. Le relevé des températures maxi et mini en fin de journée permet d'évaluer, à quelques dixièmes de degrés près, la température moyenne journalière
$$\bar{\Theta}_j = \frac{\Theta_{\min} + \Theta_{\max}}{2} \pm 0.1^\circ\text{C}$$

Lorsque qu'une connaissance plus fine de l'évolution des températures est nécessaire ou si on ne dispose pas d'observateurs permanents, on utilise un thermographe. L'organe sensible est soit une lame métallique dont on amplifie la dilatation, soit deux lames en deux métaux à coefficient de dilatation aussi différents que possible (thermographe bimétallique). Les mouvements sont amplifiés mécaniquement et inscrits par une plume sur un papier enregistreur entraîné par un mouvement d'horlogerie. Le plus souvent, les enregistrements sont hebdomadaires.

Dans les stations météorologiques, on utilise très fréquemment des sondes thermométriques à résistance de platine. Dans la plage de mesures, la résistance du fil de platine varie linéairement avec la température.

Pour la mesure des températures de l'eau en vue de l'estimation de l'évaporation, on utilise un simple thermomètre à mercure, immergé de quelques millimètres, mais protégé des rayonnements solaires.

Depuis quelques années se développent des sondes thermoélectriques de terrains. Un affichage digital (au 1/10ème de °C) permet des lectures aisées.

V.1.2 - Mesure de l'humidité de l'air

La mesure directe de l'humidité de l'air est difficile ; aussi utilise-t-on le plus souvent des mesures indirectes :

V.1.2.1 – Psychromètre

Le psychromètre se compose de deux thermomètres à mercure, l'un normal dit "sec" et l'autre dit "humide" dont le réservoir est entouré d'une mousse humidifiée par de l'eau. Le thermomètre sec indique alors la température de l'air ambiant (t) alors que le thermomètre humide enregistre une température plus faible (t') due à l'évaporation de l'eau de la mousse.

L'évaporation est d'autant plus intense et cette température plus faible que l'air est plus sec. Les tables psychrométriques permettent, connaissant Θ_{sec} , Θ_{humide} et la pression atmosphérique, d'évaluer le degré de saturation de l'air. A défaut on utilisera la relation suivante :

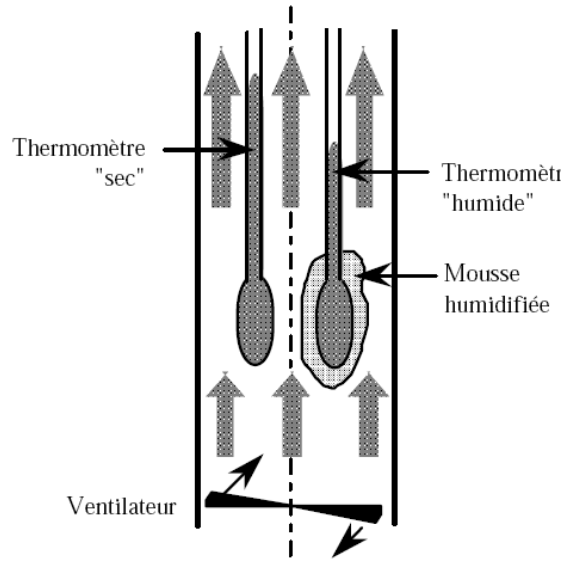


Fig.24 : schéma d'un Psychromètre

$$e_t = e_{st'} - 0,00079 \cdot P \cdot (t-t')$$

(e_t et $e_{st'}$ sont respectivement la tension de vapeur réelle à la température t et la tension de vapeur saturante à la température t' , P est la pression).

Evidemment, pour que la mesure soit représentative, il faut éviter que la vapeur émise par la mousse humide ne stagne autour du thermomètre ce qui perturberait la mesure. On utilise donc de préférence des psychromètres à ventilation forcée où l'air est introduit dans l'appareil par une petite turbine actionnée par un moteur à ressort. L'avantage de ce type d'appareil est de permettre des mesures tout à fait reproductibles et indépendantes de l'aération de l'abri ou du tour de main de l'observateur.

V.1.2.2 - Hygromètre enregistreur

Les psychromètres se prêtent mal à un enregistrement en continu du degré de saturation de l'air. On a recours alors à des hygromètres organiques utilisant la propriété de certains corps de s'allonger lorsque l'humidité relative croît.

Le plus souvent, c'est une mèche de cheveux qui sert de "capteur" ; leur dilatation relative est amplifiée et rendue linéaire en fonction de l'humidité relative. Les mouvements sont transmis à une plume qui enregistre les variations sur un diagramme entraîné par un mouvement d'horlogerie. Là encore, on utilise le plus souvent des diagrammes hebdomadaires. Malheureusement, ces appareils sont sujets à de fréquents détarages dus entre autres au vieillissement du capteur ou à un phénomène d'hystérésis après une période sèche. Il convient donc de réétalonner fréquemment ces enregistreurs après avoir eu soin de les

réhumidifier. Le réétalonnage pourra être fait grâce à un psychromètre lors du relevé hebdomadaire du diagramme.

V.1.3 - Mesure des pressions

La mesure des pressions peut être intéressante dans quelques cas particuliers (surveillance piézométrique de nappes par exemple), mais elle est nécessaire pour l'interprétation d'autres mesures.

Les appareils le plus souvent utilisés sont des barographes métalliques à capsules anéroïdes. Certains types d'appareils comme celui présenté plus loin, permettent l'enregistrement en "parallèle" de la température, de l'hygrométrie et de la pression.

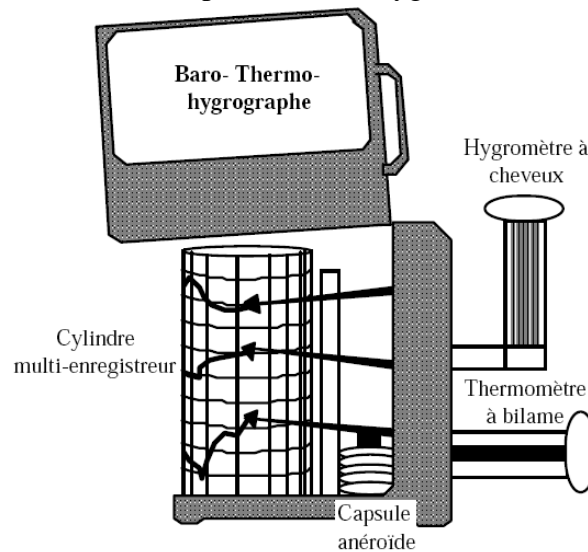


Fig.25 : barographe métallique à capsule anéroïde

V.1.4 - Mesure du vent

La mesure du vent est faite dans les stations météorologiques par des anémomètres enregistreurs des vitesses instantanées, doublés d'une girouette donnant la direction du vent.

Pour l'hydrologue et sauf cas particulier, on peut se contenter d'anémomètres totalisateurs.

En général, ils comportent quatre coupelles hémisphériques de 44 mm de diamètre. Le mouvement de rotation provoqué par le vent quelle que soit sa direction, est transmis par un axe et un système d'engrenage à un compteur indiquant directement le nombre de kilomètres parcourus par le vent. Il suffit de relever ce compteur à l'intervalle de temps souhaité (de l'ordre de une à deux fois par jour) pour pouvoir calculer la vitesse moyenne du vent. La vitesse du vent variant d'une façon sensible au voisinage du sol, on dispose généralement les anémomètres à 10 m au-dessus d'un sol plat et à une distance de tout obstacle égale au moins à dix fois la hauteur de cet obstacle. La vitesse du vent variant d'une façon sensible au

voisinage du sol, on dispose généralement les anémomètres à 10 m au-dessus d'un sol plat et à une distance de tout obstacle égale au moins à dix fois la hauteur de cet obstacle.

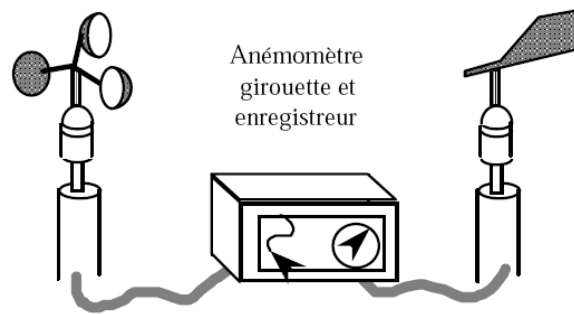


Fig.26 : Anémomètre girouette et enregistreur

V.2 - MESURES DE L'EVAPORATION

Les mesures de "l'évaporation" peuvent se faire de différentes façons selon les buts poursuivis : estimation de l'évaporation à partir d'un réservoir, estimation de l'évaporation potentielle.

Parfois on souhaite même évaluer l'ensemble de l'évaporation et de la transpiration par le système sol végétaux, c'est à dire directement l'évapotranspiration réelle.

V.2.1 - Mesures de l'évaporation à partir d'une surface libre

Différents types d'appareils ont été conçus mais avec leurs défauts et leurs qualités. Les plus utilisés sont :

V.2.1.1 - Bac classe A (du Weather Bureau, U.S.A.)

Ce bac est constitué d'un cylindre métallique de 121,9 cm de diamètre et de 25,4 cm de hauteur. Dans ce cylindre, on maintient une épaisseur d'eau de 17,5 à 20 cm.

Le cylindre est supporté par un caillebotis à 15cm du sol. Le caillebotis doit permettre une bonne aération sous le bac.

Ce bac universellement répandu ne satisfait que très partiellement l'hydrologue car, du fait de sa disposition par rapport au sol, il est très sensible aux variations de température, son inertie thermique étant faible.

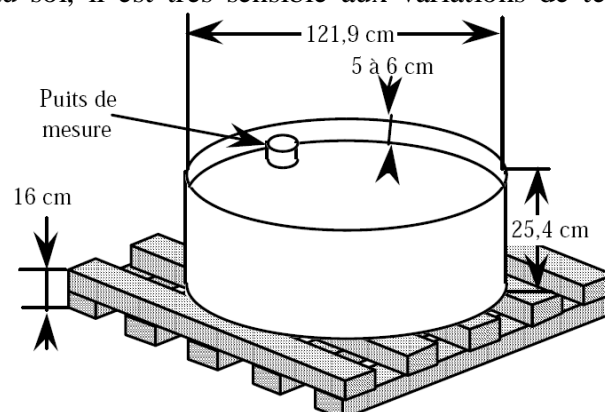


Fig.27: Bac classe A

V.2.1.2 - Bac Colorado et Bac ORSTOM

Le bac Colorado et le bac ORSTOM qui en dérive, sont des bacs de section carrée de 92,5 cm de côté (1 m pour le bac ORSTOM), d'une hauteur de 60 cm et enterré de 50 cm. L'eau est maintenue à 10 cm environ du rebord, soit sensiblement au niveau du sol. Cet appareil étant enterré et avec une plus grande épaisseur d'eau, il possède une plus grande inertie thermique et se rapproche plus des conditions naturelles.

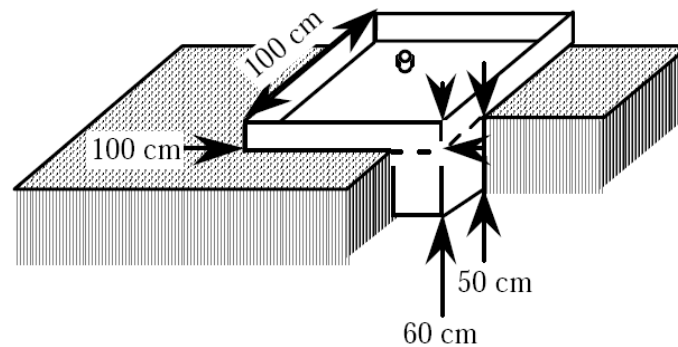


Fig.28. Bac Colorado et Bac ORSTOM

V.2.1.3 - Bac CGI 30

De conception analogue au bac Colorado, ce bac, d'origine soviétique, est celui recommandé par l'O.M.M. C'est un cylindre de 61,8 cm de diamètre (3 000 cm³) à fond conique. De 60 cm de profondeur, il est enterré de façon à ce que sa collerette dépasse de 7,5 cm du sol, le niveau d'eau étant maintenu au niveau du sol.

V.2.2 - Mesure de l'évaporation à partir de surfaces poreuses : les atmomètres

Ces appareils sont destinés à mesurer une grande caractéristique du pouvoir évaporant de l'air ambiant. Ces appareils devraient donc avoir les qualités suivantes : faible inertie thermique, surface évaporante, plane, horizontale et à comportement de corps noir, faible perturbation du champ des vitesses du vent, ne pas modifier l'humidité relative de l'air ambiant au voisinage de l'appareil.

V.2.2.1 - Le "Black Bellani"

C'est un des appareils qui correspond le mieux aux qualités que l'on exige d'un atmomètre. L'évaporation se fait à partir d'une surface poreuse de porcelaine noire de 7,5 cm de diamètre. Cette coupelle est alimentée en eau à partir d'un réservoir qui sert également à mesurer la quantité d'eau évaporée. Les faibles dimensions de l'appareil permettent d'obtenir une faible inertie thermique, et l'évaporation réduite ne perturbe pas l'hygrométrie ambiante. Enfin, la couleur noire de la surface évaporante permet de capter les radiations sur la quasi-totalité du spectre. Cet appareil est installé sans protection à 2 m du sol, dans une zone représentative.

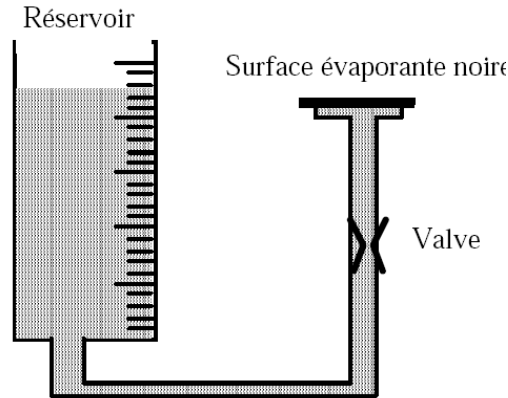


Fig.29 : Black Bellani

V.2.2.2 - Le "Piche"

Parmi un grand nombre d'autres atmomètres, nous signalerons l'atmomètre de Piche, bien qu'il ne réponde qu'imparfaitement aux qualités exigibles d'un appareil de mesure. Il est utilisé très fréquemment par les agronomes. Son emploi se justifie par la simplicité et le faible coût de l'appareil. La surface évaporante est constituée par un film de papier buvard blanc, fixé à l'extrémité du tube en verre en forme de U. Ce tube sert à la fois à l'alimentation et à la mesure de l'évaporation. La feuille de buvard est changée chaque jour après lecture de l'appareil. Le Piche est disposé à l'intérieur de l'abri météorologique ; aussi la mesure dépend-elle beaucoup des conditions d'aération.

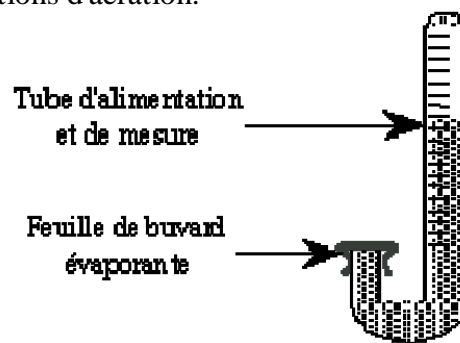


Fig.30 : Le piche

V.3 - MESURES ET ESTIMATION DE L'EVAPOTRANSPIRATION

V.3.1 - Notion d'évapotranspiration réelle et potentielle

On appelle évapotranspiration réelle (notée par la suite E_{tr}), la quantité d'eau, généralement exprimée en millimètres, évaporée ou transpirée par le sol, les végétaux et les surfaces libres d'un bassin versant.

L'évapotranspiration potentielle (notée par la suite Etp) est la quantité d'eau qui serait évaporée ou transpirée à partir d'un bassin versant si l'eau disponible pour l'évapotranspiration n'était pas un facteur limitant.

V.3.2 - Mesures directes

Les mesures directes d'Etp ou d'Etr se font surtout en agronomie où on étudie chaque type particulier de cultures. Les résultats de ces mesures sont difficiles à utiliser en hydrologie car il y a une très importante différence d'échelle entre la surface de la parcelle d'essai (quelques mètres carrés) et celle d'un bassin versant (des dizaines de kilomètres carrés). Par ailleurs, les plantations utilisées ne sont généralement pas représentatives de la végétation d'un bassin versant.

La mesure d'Etr peut être faite sur une case lysimétrique. On isole un bloc du sol de quelques mètres-carrés de surface sur environ 2 m d'épaisseur. Cet échantillon de terrain est drainé à sa base et on enregistre les débits D sortant par les drains. En surface, un collecteur fait le tour de la parcelle et récupère les eaux de ruissellement dont le débit Q est également enregistré. Les apports d'eau par la pluie P sont mesurés avec un pluviomètre. Enfin, on évalue le stock d'eau R contenu dans la case, soit par une mesure à la sonde à neutron des teneurs en eau dans le sol, soit en montant la case sur un système de bascule.

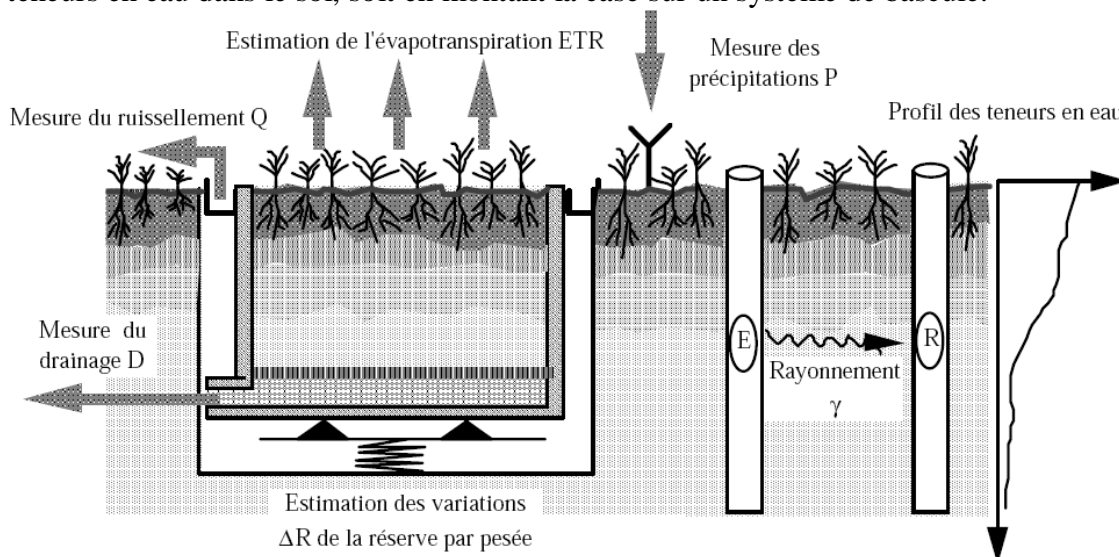


Fig.31 : case lysimétrique

Un bilan très simple permet d'évaluer l'Etr sur un intervalle de temps Δt puisque l'on doit avoir la relation suivante :

$$P = [Q + D + Etr] + \Delta R$$

$$\text{Entrée} = [\text{sorties}] + \text{variation de la réserve}$$

Le même système que la case lysimétrique, mais on parle alors "d'évapotranspiromètre", permet de mesurer l'Etp. Il suffit alors de maintenir un niveau d'eau dans les drains pour que

l'eau disponible ne soit plus un facteur limitant de l'Etr. On mesure Etp en écrivant le même bilan que précédemment mais le terme D pouvant être positif ou négatif.

V.3.3 - Estimation de l'évapotranspiration

Plusieurs formules permettent d'évaluer l'Etp à partir de différentes mesures climatologiques. La plus complète et la plus complexe est certainement la formule de Penman basée sur la notion de bilan énergétique. Cependant, le nombre de paramètres utilisés par cette formule (différentes températures, hygrométrie, rayonnement global, albédo, *etc.*) font que son emploi est rarement possible compte tenu des mesures disponibles.

V.3.3.1 - Formule de Turc

La formule de Turc, qui dérive en la simplifiant de la formule de Penmann, ne nécessite que la connaissance des températures de l'air et de la radiation globale ou de la durée d'insolation. Cette formule est la suivante :

$$Etp = 0,4 \cdot \frac{t}{t + 15} \cdot (I_g + 50) \cdot K$$

Etp : évapotranspiration potentielle mensuelle (en mm d'eau) ;

t : température moyenne mensuelle de l'air (en °C) ;

I_g : radiation globale moyenne mensuelle reçue au sol (en calorie/cm²/jour) ;

K : un coefficient égal à 1 si l'humidité relative hr est supérieure à 50 % (généralement le cas sous nos climats) ;
sinon $K = 1 + \frac{50 - hr}{70}$

Si la radiation globale I_g n'est pas mesurée, on pourra l'évaluer à partir de la durée d'insolation h par la formule : $I_g = I_{gA} \left[0,18 + 0,62 \frac{h}{H} \right]$

avec : I_{gA} radiation globale théorique (en cal/cm²/jour) ;

H durée théorique des jours du mois.

Les abaques et formules suivants permettent d'évaluer I_{gA} et H en fonction de la latitude et du mois dans les mêmes unités (cosinus d'angles en °) et en numérotant les mois de 1 (janvier) à 12 (décembre).

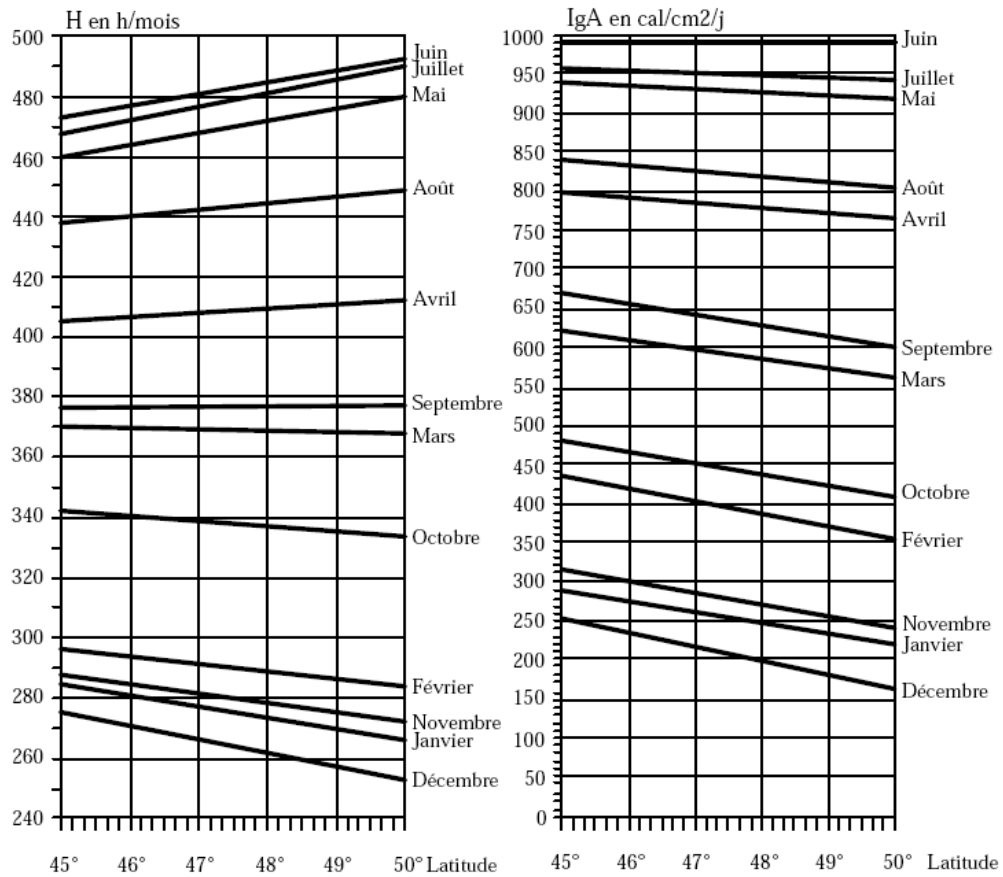


Fig.32 :Abaques permettent d'évaluer IgA et H

$$H = 362,7 + 0,201 \text{ lat} + (4,085 \text{ lat} - 80,99) \cos (30,01 \text{ i} - 188,9)$$

$$IgA = 1\ 035 - 9,078 \text{ lat} + (7,050 \text{ lat} + 49,90) \cos (29,92 \text{ i} - 182,5)$$

Cette formule d'emploi aisé, bénéficie d'un préjugé assez favorable quant à la précision des estimations obtenues à l'échelle mensuelle. Parfois, on utilise même cette formule à l'échelle décadaire en y adjoignant, si besoin, un terme tenant compte des effets de la végétation.

V.3.3.2 - Formule de Thornthwaite

THORNTHWAITE a proposé également une formule basée essentiellement sur les températures de l'air :

avec :

$$E_{tp} = 16 \cdot \left(10 \frac{t}{I}\right)^a \cdot K$$

$$i = \left(\frac{t}{5}\right)^{1,5} \text{ et } I = \sum_{1}^{12} i$$

$$a = \frac{1,6}{100} I + 0,5$$

t : est la température moyenne mensuelle du mois considéré ;

Etp : est l'évapotranspiration potentielle du mois considéré (en mm d'eau) ;

K : est un coefficient d'ajustement mensuel.

Tab.09 : Exemple de variation de coefficient K avec les mois

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
K	0,73	0,78	1,02	1,15	1,32	1,33	1,33	1,24	1,05	0,91	0,75	0,70

V.3.4 - Evaluation de l'évapotranspiration réelle

V.3.4.1 - Formule de Turc

TURC a proposé une formule permettant d'évaluer directement l'Etr annuelle moyenne d'un bassin à partir de la hauteur annuelle de pluie et de la température moyenne annuelle :

$$Etr = \frac{P}{\sqrt{0.9 + \frac{P^2}{L^2}}} \quad \text{avec} \quad L = 200 + 25 t + 0,05 t^3$$

Etr : représente l'évapotranspiration réelle (en mm/an) ;

P : la hauteur annuelle de pluie (en mm) ;

t : la température annuelle (en °C).

Cette formule est d'un emploi aisé mais elle ne donne malheureusement que l'ordre de grandeur de l'Etr. En effet, cette formule permet l'estimation du "déficit d'écoulement" qui ne se rapproche de l'évapotranspiration réelle que pour des bassins versant relativement étendus, sans échanges à la frontière et pour des durées d'observation assez longues pour que l'on puisse négliger les variations de réserves souterraines. Dans la mesure du possible, on préférera la méthode suivante.

V.3.4.2 - Bilan simplifié selon THORNTHWAITE

Cette méthode est basée sur la notion de réserve en eau facilement utilisable (notée par la suite RFU). On admet que le sol est capable de stocker une certaine quantité d'eau (la RFU) ; cette eau peut être reprise pour l'évaporation par l'intermédiaire des plantes.

La quantité d'eau stockée dans la RFU est bornée par 0 (la RFU vide) et RFU max (capacité maximale de la RFU qui est de l'ordre de 0 à 200 mm suivant les sols et sous-sols considérés, avec une moyenne de l'ordre de 100 mm).

On admet que la satisfaction de l'Etp a priorité sur l'écoulement, c'est-à-dire qu'avant qu'il n'y ait d'écoulement, il faut avoir satisfait le pouvoir évaporant (Etp = Etr). Par ailleurs, la complétion de la RFU est également prioritaire sur l'écoulement.

On établit ainsi un bilan à l'échelle mensuelle, à partir de la pluie du mois P, de l'Etp et de la RFU.

Si $P > E_{tp}$, alors :

- $E_{tr} = E_{tp}$
- il reste un excédent ($P - E_{tp}$) qui est affecté en premier lieu à la RFU, et, si la RFU est complète, à l'écoulement Q

Si $P < E_{tp}$:

- on évapore toute la pluie et on prend à la RFU (jusqu'à la vider) l'eau nécessaire pour satisfaire l' E_{tr} soit :
- ✓ $E_{tr} = P + \min(RFU, E_{tp} - P)$
- ✓ $RFU = 0$ ou $RFU + p - E_{tp}$
- si $RFU = 0$, la quantité ($Da = E_{tp} - E_{tr}$) représente le déficit agricole, c'est-à-dire sensiblement la quantité d'eau qu'il faudrait apporter aux plantes pour qu'elles ne souffrent pas de la sécheresse.

Tab.10 : Exemple de bilan hydrique de C.V.THRANTHWAITE

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pluie du mois	67	55	41	49	54	77	60	67	65	55	61	62
E _{tp}	3	8	33	61	90	103	109	94	67	35	14	5
RFU	100	100	100	88	52	26	0	0	0	20	67	100
E _{tr}	3	8	33	61	90	103	86	67	65	35	14	5
D.A.	0	0	0	0	0	0	23	27	2	0	0	0
Écoulement	64	47	8	0	0	0	0	0	0	0	0	23
							<-	RFU vide	->			

Pour établir ce bilan, il faut se donner la RFU maximale en fonction de la nature du bassin versant (dans cet exemple RFU max = 100 mm). Par ailleurs, il faut connaître l'état de la RFU à la fin du mois antérieur au début de l'établissement du bilan. On tient alors l'un des deux raisonnements suivants :

- si la RFU doit être pleine un jour, ce sera à la fin de la période durant laquelle on a pu la remplir, c'est-à-dire à la fin du dernier mois où $P > E_{tp}$;
- si la RFU doit être vide un jour, ce sera à la fin de la période durant laquelle on a pu la vider, c'est-à-dire à la fin du dernier mois où $P < E_{tp}$.

Ayant établi ce bilan par mois, on évalue l' E_{tr} annuelle par la somme de 12 E_{tr} mensuelles. Cette méthode peut être également utilisée avec l'estimation d' E_{tp} par la formule de Turc et donne des résultats satisfaisants sous nos climats.

VI - MESURES DES PRECIPITATIONS

VI.1 - DIFFICULTES DE LA MESURE

Les mesures de précipitations intéressent des secteurs d'activités assez divers mais principalement la météorologie, l'agriculture, l'hydrologie, *etc.* Des réseaux de mesures ont généralement été installés de longue date. En

L'idée est de mesurer la quantité d'eau tombée au sol durant un certain intervalle de temps ; or, ceci n'est pas aussi facile qu'il y paraît :

- la taille de l'échantillon est ridiculement faible puisqu'avec une surface réceptrice ne dépassant pas 2 000 cm², on espère dans le meilleur des cas, représenter la pluie sur quelques kilomètres-carrés ; on échantillonne donc quelques dix millièmes de la surface ;
- les précipitations sont par ailleurs très sensibles au vent, ce qui explique que l'introduction de l'appareil occasionne une perturbation de la circulation et ainsi, une modification des précipitations ;
- enfin, signalons que pour la neige, on peut souvent se contenter de mesurer son équivalent en eau, mais dans ce cas, encore faut-il que les flocons aient bien voulu se poser dans la surface réceptrice.

On retiendra que la signification d'une mesure pluviométrique n'est que relative. Si on a le soin d'uniformiser les appareils et les conditions d'implantation, les hauteurs de pluie enregistrées seront comparables entre elles et liées par une relation stable mais inconnue à la hauteur de pluie réellement tombée au sol.

Cet handicap est acceptable dans la plupart des cas puisque les hauteurs de pluie mesurées seront mises en relation avec les écoulements par des modèles statistiques ou par des modèles déterministes mais calés sur différentes observations (par exemple, trouver un coefficient de ruissellement supérieur à 100 % est alors acceptable et signifie pratiquement que la hauteur de pluie réelle est sous-estimée).

VI.2 - APPAREILLAGES PLUVIOMETRIQUES

VI.2.1 - Les pluviomètres

Le pluviomètre est un appareil très simple qui comporte une surface réceptrice limitée par une collerette cylindrique ; l'eau traversant cette surface est dirigée par un entonnoir vers un seau récepteur. Si durant un certain intervalle de temps Δt , on a récupéré un volume V à travers la surface réceptrice S , la hauteur de pluie $H\Delta t$ tombée est $H\Delta t = V/S$

Dans la pratique, on adjoint à chaque pluviomètre une éprouvette graduée (fonction de la surface réceptrice S) qui permet la lecture directe de $H\Delta t$ en $1/10^{\text{ème}}$ mm.

Bien que les surfaces réceptrices soient identiques, les mesures divergent du fait du changement de hauteur : 1,5 -> 1 mètre et du changement de matériaux : tôle -> plastique, ce qui modifie les condensations sur les parois du récepteur. En général, les pluviomètres sont relevés par un observateur une ou deux fois par jour à 6 h et 18 h T.U.

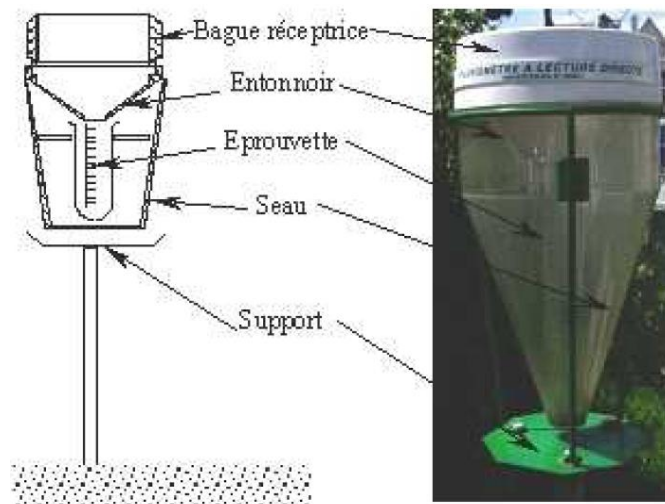


Fig.33 : Pluviomètre avec éprouvette graduée

VI.2.2 - Les pluviographes

Ces appareils sont destinés à l'enregistrement de la hauteur de pluie cumulée en fonction du temps. Deux types principaux ont eu un certain développement : les pluviographes à augets basculeurs et ceux à siphons. Actuellement, ces derniers tendent à être abandonnés.

Les pluviographes à siphon ne sont plus que très rarement installés. Cependant on peut encore en rencontrer sur le terrain comme ici du matériel russe installé en Syrie.

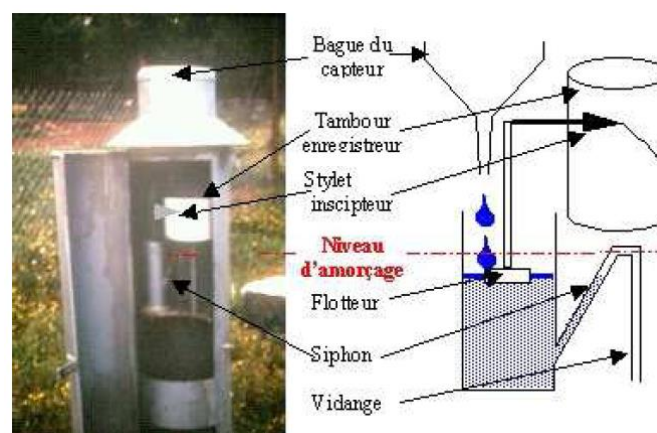


Fig.34 : Principe d'un pluviographe à siphon

Les pluviographes à augets basculeurs ont la partie captante commune avec les pluviomètres ; ils en diffèrent par la partie réceptrice en aval de l'entonnoir. L'eau est dirigée par un court tube vers les augets de mesures. Ceux-ci sont disposés symétriquement par rapport à un axe de rotation horizontal. Dans la situation du schéma ci-contre, l'auget de gauche est en train de se remplir alors que celui de droite s'est déjà vidé.

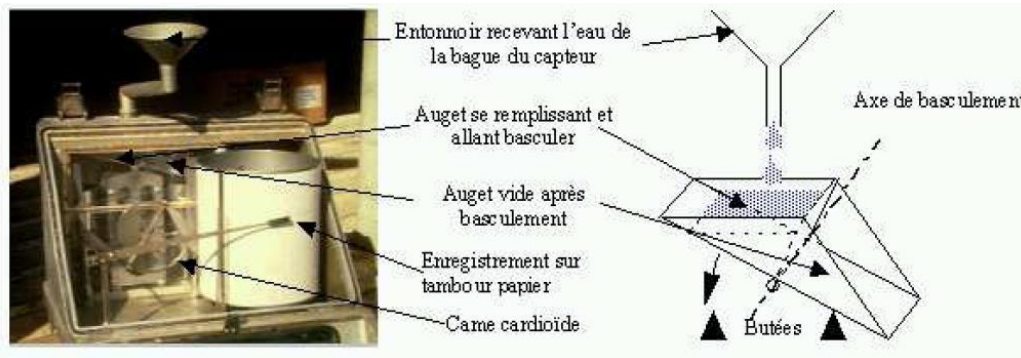


Fig. 35 : Pluviomètre à augets

Lors du remplissage, le centre de gravité de l'ensemble des deux augets se déplace vers la gauche jusqu'à dépasser la verticale de l'axe de rotation ; l'ensemble bascule alors vers la gauche et l'auget plein se vide alors que celui de droite est venu en position de remplissage.

Les augets sont tarés de façon à ce que le basculement se produise lorsqu'ils contiennent 20 g d'eau. La partie captante ayant des surfaces de 2 000 cm², 1 000 cm² ou 400 cm², un basculement correspond à 0,1 mm, 0,2 mm ou 0,5 mm de pluie.

VI.2.2.1 Enregistrement mécanique :

Chaque basculement provoque, par un système d'ancre, l'échappement d'une roue dentée.

La rotation de cette roue entraîne mécaniquement le déplacement d'un stylet inscripteur sur un cylindre entraîné lui-même par un mouvement d'horlogerie. Un système de came cardioïde permet de modifier en limite du papier le sens du déplacement du stylet.

La vitesse d'entraînement du tambour est variable ; un système de démultiplication permet d'établir une rotation complète en un jour, une semaine, deux semaines ou un mois. En fonction de ces vitesses, l'intervalle de temps minimum sur lequel on peut effectuer une lecture varie de quelques minutes à une heure.

L'ensemble de l'appareillage est assez volumineux, ce qui nécessite de placer sous la partie réceptrice un boîtier cylindrique protégeant l'appareillage. L'importance du boîtier perturbe le vent et affecte donc la mesure de la pluie.

VI.2.2.2 Pluviographe transducteur d'impulsions :

Dans ce type d'appareil, les basculements des augets sont convertis en impulsions électriques : une ampoule contenant du mercure est fixée aux augets. A chaque mouvement, le mercure ferme un contact électrique en se déplaçant. Cette impulsion électrique est aisément transmissible à distance, soit vers un chronototalisateur qui enregistre les impulsions sur papier, soit vers un enregistreur magnétique. L'avantage de ce type d'appareil est de réduire quasiment au volume des augets, l'appareillage à installer sous la bague réceptrice ; on réussit alors à construire un coffret de protection d'encombrement analogue à celui d'un pluviomètre.

VI.2.2.3 Mesure de l'équivalent en eau des chutes de neige :

Tous les pluviographes sont aptes à mesurer l'équivalent en eau des précipitations sous forme solide qui atteignent le capteur. En effet, il suffit de leur adjoindre un système de réchauffage pour que la neige ou la grêle fonde au contact de l'entonnoir. Pour les pluviographes mécaniques, on leur adjoint généralement un chauffage au gaz propane, la bouteille, le brûleur et le thermostat prenant place dans la cabine. Pour les appareils à transducteur, la place réduite conduit à utiliser un chauffage électrique. Notons tout de suite que néanmoins, ces appareils ne donnent qu'une estimation très grossière des chutes de neige car les flocons sont très soumis aux vents qui perturbent les appareils.

VI.2.2.4 Précision des appareils :

Les pluviographes présentent l'inconvénient de sous-estimer systématiquement les fortes intensités. Les gouttes de pluie éclaboussent vers l'extérieur des augets lorsque l'ensemble est à l'horizontale ; l'inertie de l'appareillage fait que, durant le basculement, les gouttes continuent d'arriver et font déborder l'auget. Enfin, l'appareillage perturbe le champ des vitesses du vent. Malgré des améliorations constantes, la sous-estimation varie de 4 à 10 % pour des intensités de 75 à 250 mm/h.

La prudence minimale veut que l'on adjoigne un seau qui récupère l'eau à la sortie du pluviographe. La mesure de l'eau qu'il contient permet de vérifier que l'appareil ne s'est pas détaré (basculement pour un poids différent de 20 g) ou en cas de panne totale, de connaître la hauteur totale de pluie durant la période séparant de la dernière visite.

VI.2.3 - Les nivomètres

Comme on l'a vu, les pluviographes permettent d'avoir une vague idée de l'équivalent en eau des précipitations neigeuses. Cela n'est pas suffisant, surtout en zone de montagne où il est intéressant de connaître à la fois l'importance quantitative du manteau neigeux mais aussi son état (prévision d'avalanches, prévision de crues, *etc.*).

VI.2.3.1 - Mesures par sondage

Une des premières techniques de mesure qui a été développée est d'envoyer sur le terrain un opérateur qui procède à un carottage du manteau neigeux. On pèse alors la carotte pour obtenir l'équivalent en eau. Bien évidemment, ce système est très contraignant pour le personnel qui doit opérer dans des zones d'accès difficiles et par des conditions météorologiques défavorables.

VI.2.3.2 - Mesures en continu du poids

Plusieurs techniques ont été développées ; elles sont basées essentiellement, soit sur la mesure directe du poids de la neige par un système de balance installé à la surface du sol (table à neige) ou par l'enregistrement de la pression régnant dans un coussin gonflé d'un fluide antigel et disposé à la surface du sol (coussin à neige).

Ces techniques semblent être de plus en plus abandonnées devant le développement des appareils à rayonnement radioactif.

VII – HYDROMETRIE

Les débits des cours d'eau varient en fonction du temps. Certaines études nécessitent des mesures instantanées de ces débits ; on exécute alors des jaugeages aux instants choisis. Dans la plupart des cas, c'est l'évolution des débits en fonction du temps qui nous intéresse ; on installe alors des stations hydrométriques (appelées également stations de jaugeage).

VII.1 - ACQUISITION DES DEBITS EN FONCTION DU TEMPS

Actuellement, il n'existe aucune technique opérationnelle qui permette de mesurer directement le débit en fonction du temps. Cette opération se fait généralement dans la pratique de la manière suivante :

- on enregistre en un point du cours d'eau (la station hydrométrique), la hauteur d'eau H en fonction du temps. Cet enregistrement $H(t)$ est appelé "limnigramme"
- A différents instants $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, on pratique des mesures instantanées de débits $Q_{t1}, Q_{t2}, \dots, Q_{tn}$; ces mesures correspondent à des enregistrements de hauteur synchrone $H_{t1}, H_{t2}, \dots, H_{tn}$.
- Dans certaines conditions hydrauliques, comme le passage en "section critique", il existe une relation biunivoque entre la hauteur d'eau et les débits. Dans ces conditions, les différents jaugeages (Q_{ti}, H_{ti}) permettent d'établir la relation hauteur-débit appelée courbe de tarage : $Q(H)$.
- en combinant la courbe de tarage $Q(H)$ et le limnigramme $H(t)$, on obtient aisément l'évolution du débit en fonction du temps $Q(t)$ appelé hydrogramme.

Cette vision est tout à fait idyllique car de nombreuses difficultés apparaissent au long des différentes étapes comme nous allons le voir.

VII.2 - LES METHODES DE JAUGEAGES

Un jaugeage est donc une mesure quasiment instantanée du débit d'un cours d'eau. Les techniques utilisées sont nombreuses et généralement complémentaires ; elles s'appuient sur des principes très différents selon les cas.

VII.2.1 - Réservoirs étalonnés

Cette technique simple consiste à mesurer le temps nécessaire Δt , pour remplir un récipient de volume V . On obtient le débit Q par la relation suivante : $Q = V/\Delta t$.

Cette méthode est surtout utilisée pour jauger des sources ou de très petits cours d'eau (débits de l'ordre de quelques litres par seconde au maximum). Le récipient peut être un seau de 10 litres ou un bac plastique de 100 litres par exemple. La seule condition est de pouvoir

faire rentrer l'eau dans le récipient ce qui nécessite, soit une chute naturelle, soit de pouvoir aménager cette chute par une gouttière en plastique par exemple.

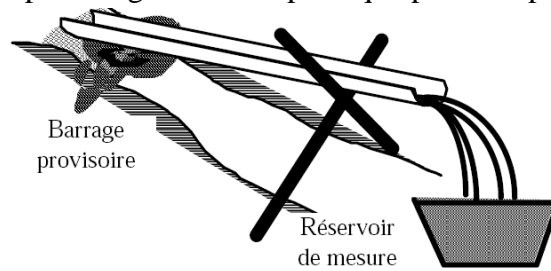


Fig.36 : Jaugeage réservoir étalonné

VII.2.2 – Déversoirs

Le débit d'un cours d'eau peut être mesuré en utilisant des déversoirs sur des orifices normalisés. Ces techniques, adaptées surtout aux petits débits, utilisent les résultats de l'hydraulique classique mais dans des conditions bien souvent éloignées de celles rencontrées en laboratoire !

Différents types de déversoirs sont utilisés mais on rencontre principalement des déversoirs triangulaires dont la relation hauteur-débit théorique est :

$$Q = a h^b$$

En général on utilise :

$$Q = 1,32 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot h^{2,47}$$

Dans la pratique, il est prudent de réaliser quelques jaugeages de contrôle permettant de déterminer les valeurs a et b dans les conditions réelles d'installation. Il en est de même pour les autres types de déversoirs rectangulaires avec ou sans contraction, à large seuil ou profilés.

Dans la quasi-totalité des cas, on utilise des déversoirs fixés à demeure dans le cours d'eau. Cette technique n'intéresse donc que des stations où l'on est disposé à réaliser un certain investissement. Par ailleurs, l'installation d'un déversoir ne peut se faire que si la pente est suffisante pour permettre un relèvement de la ligne d'eau amont sans conséquences néfastes ; d'autre part, le ralentissement provoqué à l'amont entraîne des sédimentations qui peuvent modifier progressivement la relation hauteur-débit.

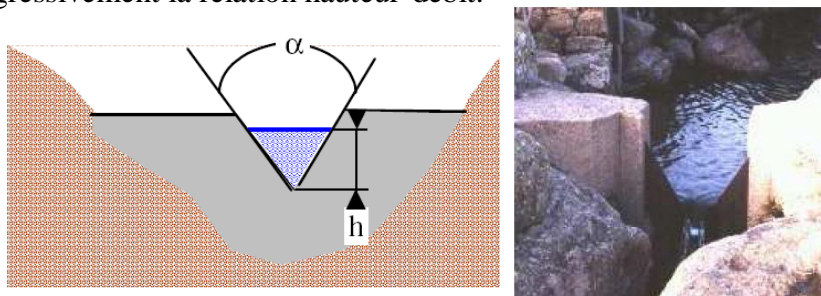


Fig.37 : Jaugeage par déversoir

VII.2.3 - Jaugeurs à ressaut

Ces appareils ont pour but de provoquer un passage en régime critique où la relation hauteur-débit est biunivoque et ne dépend théoriquement que des dimensions géométriques de l'appareil.

Ce passage en régime critique est provoqué soit par un rétrécissement de la veine fluide, soit par un relèvement, soit par les deux à la fois. Les avantages de ces appareils par rapport aux déversoirs sont de ne provoquer qu'un faible relèvement de la courbe de remous et de permettre un passage facile au transport solide.

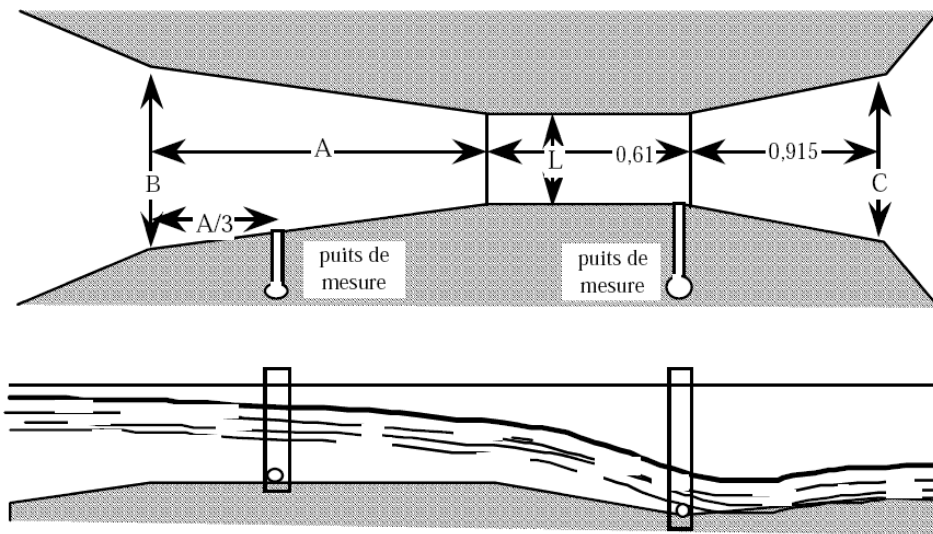


Fig.38 : Jaugeurs à ressaut

Le jaugeur à ressaut le plus connu est le jaugeur "Parshall" figuré ci-dessus. Les différentes dimensions sont normalisées en fonction de sa largeur L au col.

$$A = 0.49 L + 1.194$$

$$B = 1.196 L + 0.479$$

$$C = L + 0.305$$

ABC et L en mètres

Le débit Q (en m³/s) est fonction de la largeur L au col (en m) et de la hauteur d'eau H (en m)

$Q = 0,372 L (H * 3,28)^x$ où l'exposant x dépend de la largeur au col L :

L (en m)	0,2	0,6	0,8	1,0	2,0	2,6
x	1,506	1,548	1,560	1,569	1,598	1,609

Il convient cependant de se méfier de ces formules car elles peuvent légèrement varier selon les conditions locales d'installation du Parshall. La prudence élémentaire est de vérifier ces formules par quelques jaugeages.

Enfin, si une remontée du niveau aval noie le ressaut, des coefficients correcteurs peuvent intervenir en fonction du niveau h .

Actuellement les jaugeurs à ressaut sont disponibles sous forme préfabriquée en résine polyester. Il suffit alors de le caler en bonne position dans le cours d'eau puis de le noyer dans du béton en s'en servant comme coffrage perdu.

VII.2.4 - Jaugeages par dilution

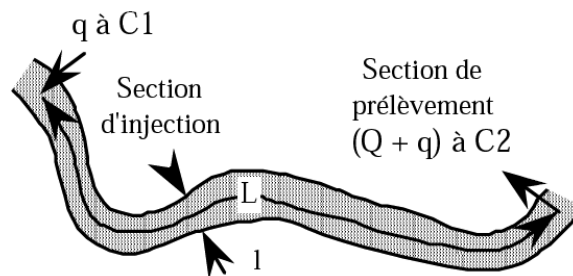


Fig.39 : Jaugeages par dilution

Le principe général du jaugeage par dilution est simple. On injecte dans une section I, un traceur à une concentration $C1$; en un point de prélèvement P situé en aval, on prélève un échantillon d'eau de la rivière et l'on détermine sa concentration $C2$ en traceur. Il est alors aisé d'établir la relation entre le débit Q du cours d'eau et les concentrations $C1$ et $C2$, soit par l'égalité des flux, soit par la conservation des masses entre les points P et I selon les procédés d'injection.

VII.2.4.1 - Choix du traceur

A priori, le nombre de traceurs utilisables est élevé ; cependant, il est souhaitable qu'ils possèdent les qualités suivantes :

- facilement solubles dans l'eau,
- stables chimiquement en solution,
- non toxiques,
- facilement dosables et à faibles concentrations,
- peu coûteux,
- non adsorbable par les matières en suspension ou au contact des rives (argiles),
- non préexistants dans le cours d'eau (si possible) ou à faible concentration, *etc.*

Dans ces conditions, le choix se réduit beaucoup et dans la pratique, on utilise les produits suivants :

- chlorure de sodium (NaCl) : l'inconvénient est que souvent les quantités de sel à injecter sont importantes ; par contre, le dosage par résistivimétrie est relativement aisé ;

- La Rhodamine B (C₁₀ H₂₁ Cl O₃ N₂) : son avantage essentiel est d'être dosable à de très faibles concentrations. On utilise ainsi peu de produit même pour de gros débits ; on fait donc une économie financière et surtout la mise en oeuvre sur le terrain est simplifiée. Cependant, ce colorant rouge très violent est difficile à diluer, à nettoyer des appareils et d'autre part, il se fixe sur les argiles en suspension dans l'eau ;
- le biochromate de sodium (Na₂ Cr₂ O₇) : c'est de loin le traceur qui a été le plus utilisé. Il satisfait à la quasi-totalité des qualités requises pour un traceur hydrologique. Cependant, il s'avère que ce sel est toxique tout au moins à forte concentration (>>1 mg/litre) et pour des durées supérieures à la journée ;
- colorants alimentaires : trois traceurs ont été retenus jusqu'à maintenant : la tartrazine (E102), le jaune orange S (E110) et le rouge cochenille (E124). Au niveau des avantages, citons la non-toxicité ; par contre, comme la rhodamine, ces substances sont difficilement solubles ;
- enfin, d'une autre nature, les traceurs radio-actifs :
 - à rayonnements g, surtout le brome 82 ; les inconvénients sont surtout dus à la protection nécessaire (matériel lourd) et à la nécessité d'avoir une pile proche pour les irradiations (période courte de l'ordre de 36 h) ;
 - à rayonnements b essentiellement le tritium, beaucoup moins dangereux mais avec une période beaucoup plus longue (24 ans), ce qui justifie son utilisation plutôt comme traceur des eaux souterraines.

On retiendra que le bichromate est un bon traceur jusqu'à présent le plus utilisé. Il est probable que d'autres produits pourront le supplanter comme peut-être les colorants alimentaires ou des traceurs radio-actifs avec le développement des générateurs de radio-éléments ("*vaches*" à radio-éléments).

Le principe général n'en demeure pas moins le même. Seules les techniques de dosages seront affectées.

VII.2.4.2 - Choix du site

La mesure des débits par dilution ne peut s'effectuer que s'il y a un bon brassage de l'eau entre le point et le point de prélèvement. Il faut que la concentration C₂ mesurée au point de prélèvement représente bien la concentration moyenne dans toute la section à cet instant.

Un site favorable est un tronçon de rivière particulièrement agitée avec soit des blocs rocheux au milieu du cours d'eau, soit une succession de coudes qui assurent un brassage latéral. Dans la pratique, on a souvent tendance à privilégier le rôle de chutes ou de rapides qui n'assurent cependant qu'un brassage vertical.

La longueur du tronçon sur lequel on doit faire la mesure sera au moins égale à la "distance de bon mélange". Cette notion est un peu subjective ; la meilleure façon de procéder est encore de faire un test avec un colorant et d'évaluer à l'oeil la distance nécessaire pour que ce colorant se répartisse uniformément.

Selon la nature du courant, l'ordre de grandeur des distances de bon mélange est :

Tab. 11 : l'ordre de grandeur des distances de bon mélange selon M. ANDRE

Largeur du cours d'eau (m)	Longueur de bon mélange (m)
0 à 10	50 à 500
10 à 50	500 à 2 500
50 à 200	2 500 à 15 000

On peut également utiliser une formule qui donne la distance de bon mélange L (en m) en fonction de la largeur b (en m) et du débit Q (en m³/s), ou en tout cas de son estimation, sans cela..... :

$$L = k b^{1,1} Q^{0,33}$$

k est un paramètre qui varie entre 8 et 12 selon la nature du courant.

Par ailleurs, il faut éviter, dans la mesure du possible, que dans le tronçon de mesure, il y ait des zones d'eaux mortes que le traceur met très longtemps à envahir.

VII.2.4.3 - Injection à débit constant

Supposons que l'on ait déterminé le site d'injection I, la distance de bon mélange L et par conséquent le point de prélèvement P ; on injecte en I un débit constant q de traceur à la concentration C₁. Au point P, on prélève des échantillons à la concentration C₂.

Si on peut supposer que le régime permanent est atteint, le flux de traceur entrant dans le tronçon est égal au flux sortant :

$$q.C_1 = (Q + q).C_2$$

En général, q est négligeable devant Q, d'où l'on tire :

$$Q = q \frac{C_1}{C_2}$$

La seule difficulté est de réaliser le régime permanent. Pour cela, on effectue un essai avec un colorant généralement de la fluorescéine. (Pour une rivière limpide, on peut compter 100 grammes de fluorescéine pour colorer 1 000 m³ d'eau et on dissout aisément 100 grammes de fluorescéine dans un litre d'eau. On peut se baser sur une dose de 100 g par m³/s.)

A un instant t = 0, on injecte la fluorescéine au point I et on note au point P l'instant t₁ où apparaît la fluorescéine et t₂ l'instant où elle disparaît. Cet essai peut s'interpréter comme

l'injection en I d'une impulsion de traceur et l'observation P de la réponse impulsionnelle du tronçon IP. On admet aisément que la durée $t_2 - t_1$ est indépendante de la qualité de colorant injecté (dans la mesure où l'injection demeure quasi-instantanée).

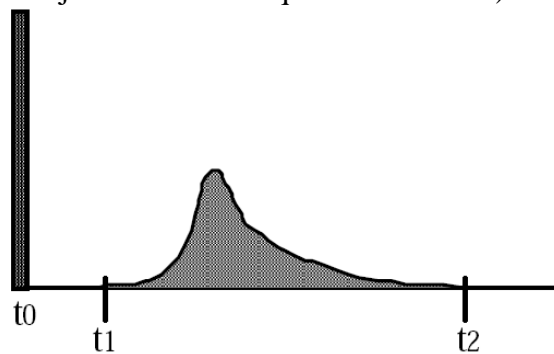


Fig. 40 : Courbe de l'apparition et disparition de fluorescéine

A une succession d'impulsions de durée dt correspondra une succession de réponses impulsionnelles déphasées dans le temps de dt . La réponse globale de sera la somme des réponses impulsionnelles comme le suggère la figure ci-contre.

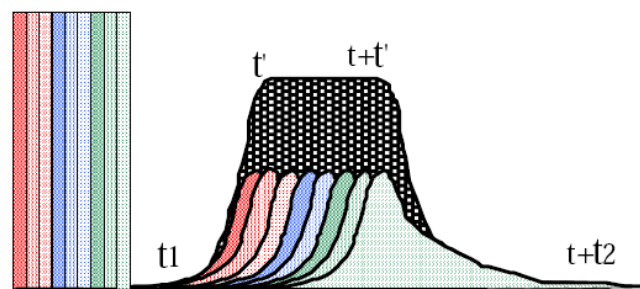


Fig.41 : Temps de réponse de fluorescéine

Si on injecte durant une durée t suffisante, on observera une montée de la concentration en sel entre les instants t_1 et t' puis un palier en régime permanent entre les instants t' et $t + t'$ enfin une décroissance entre les instants $t + t'$ et $t + t_2$. Dans la pratique, on désire obtenir un régime permanent durant 15 minutes où on fera un prélèvement par minute. Par ailleurs, le temps t_1 est généralement sous-estimé car en fait, t_1 représente l'instant où la fluorescéine disparaît "à la vue" ; on peut raisonnablement penser que la concentration ne s'annule réellement que pour un temps plus long $t_1' \approx t_1 + (t_1 - t_0)$, soit un temps de passage deux fois plus long. Dans ces conditions, on injectera entre les instants t_0 et $t_1' - t_0 + 15$ mn [soit $2(t_1 - t_0) + 15$ mn] et on fera les 15 prélèvements entre les instants t_1' [soit $2(t_1 - t_0)$] et $t_1' + 15$ mn [soit $2(t_1 - t_0) + 15$ mn].

VII.2.4.4 - Méthode dite globale

Comme pour le cas précédent, on se positionne en deux points P et I séparés par une distance L de bon mélange. On injecte instantanément en I une certaine quantité de traceurs : un volume V à la concentration C1 soit V.C1. Au point P, on fait différents prélèvements dans le temps dont on mesure la concentration C2 (t). On peut écrire qu'il y a conservation des masses et par conséquent que, ce que l'on a injecté, passera dans la section P, donc :

$$V.C_1 = \int_0^{\infty} Q.C_2(t)dt$$

soit
$$Q = \frac{V.C_1}{\int_0^{\infty} C_2(t)dt}$$

Les différents prélèvements faits en P permettent de construire point par point la courbe C2(t) et de déterminer alors l'intégrale qui permet d'évaluer Q. Il faut toutefois noter que les "queues de courbe" sont toujours mal connues, dans la mesure où l'opérateur ne dispose pas de l'éternité pour achever ses prélèvements. Il sera dans ce cas toujours judicieux de rechercher si cette "queue de courbe" ne s'ajuste pas à une fonction de type hyperbolique ou exponentielle décroissante, ce qui en facilite l'intégration algébrique.

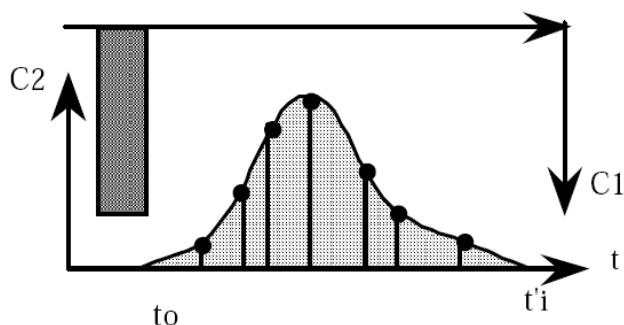


Fig.42 : Intégrale de C2(t)

VII.2.4.5 - Mise en œuvre pratique

D'un point de vue pratique, il convient de prévoir les concentrations C1 à injecter, l'injection à débit constant, les prises d'échantillons.

VII.2.4.5.1 Concentrations C1 à injecter :

La quantité du traceur que l'on injectera doit être telle que la concentration finale C2 soit au moins du double de la précision de dosage. Pour les principaux traceurs, les concentrations minimales dosables C2 sont les suivantes :

Tab.12 : Concentrations des principaux traceurs

Traceur	Chlorure	Rhodamine	Bichromate	Colorants alimentaires
C2 min(mg/l)	5	0,1	0,2	0,2
C1 max(mg/l)	200	10	600	100

Il faudra donc en passer par une évaluation du débit à mesurer de façon à ajuster au mieux la concentration et le débit d'injection.

VII.2.4.5.2 Injection :

Pour l'injection à débit constant, s'étant fixé le terme $Q C_1$ et la durée t de l'injection, on prépare la quantité de traceur à utiliser (par exemple, dans un fût de 100 ou 200 litres) Le liquide est alors mis dans un récipient fermé hermétiquement. Lorsque l'on ouvre le robinet, il se crée une dépression qui augmente jusqu'à ce que l'air s'introduise par le tube d'aération. Le débit reste alors constant jusqu'à ce que le niveau du liquide atteigne le bas du tube d'aération. Ce vase se vidange directement dans le cours d'eau ou si la largeur est importante, on installera une rampe d'arrosage.

Pour la méthode globale, l'injection est plus simple et on se contente de déverser instantanément le contenu du récipient où on a préparé la solution à C_1 .

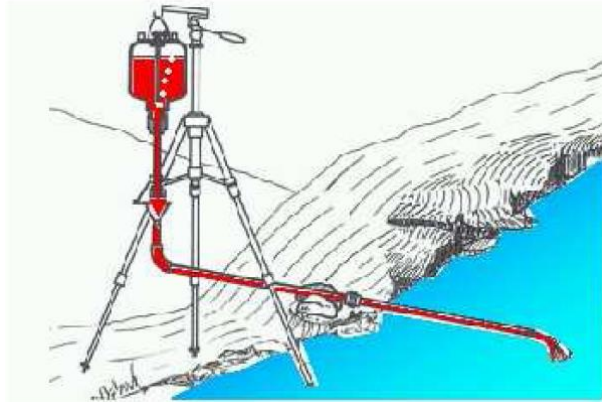


Fig.43: Récipient fermé pour injecter le traceur

VII.2.4.5.3 Prélèvements et analyses :

Dans la méthode à débit constant, on prélèvera une quinzaine d'échantillons (un par minute) en passant de la rive droite, au milieu, puis à la rive gauche et retour.

Pour la méthode globale, le plus simple est de procéder à des prises d'échantillons (20 à 25), de volume constant et à des intervalles de temps constants en un point fixe de la section (si possible au milieu).

Le mélange de ces différents prélèvements donnera un échantillon de la concentration moyenne sur la période de prise. Dans la plupart des cas, l'analyse est faite par colorimétrie ; on procédera donc, durant le jaugeage, à un prélèvement de solution à C_1 que l'on diluera avec l'eau de la rivière à différentes concentrations voisines du C_2 escompté. Au laboratoire, ces échantillons dilués serviront à l'étalonnage du colorimètre.

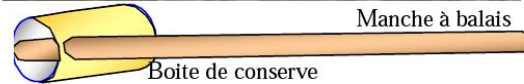


Fig.44 : Outil et méthode de prélèvement

VII.2.4.6 - Domaine d'application

Longtemps, les méthodes de jaugeage par dilution n'ont été utilisées que pour des petits débits (inférieurs à 10m³/s) et pour des eaux peu chargées.

Le développement de techniques chimiques d'extraction et de reconcentration font que de nos jours, il est possible à des expérimentateurs avertis de procéder à des jaugeages beaucoup plus importants et dans des eaux chargées.

Par ailleurs, ces techniques sont particulièrement adaptées aux cours d'eau très brassés (type torrent de montagne), conditions qui sont au contraire défavorables aux mesures au moulinet comme on le verra plus tard. Enfin, du point de vue personnel, ces techniques demandent beaucoup de soin, de propreté, *etc.*, surtout la méthode dite globale.

VII.3.2 – Limnimétrie

La limnimétrie est la mesure des niveaux en fonction du temps. Toute station comporte au moins une échelle de mesures des hauteurs et éventuellement un limnigraphe.

VII.3.2.1- Les échelles

Les échelles sont les repères fixes sur lesquels on lira le niveau d'eau H. Elles sont réalisées le plus souvent en tôle émaillée). Constituées généralement d'éléments de 1 m, elles portent des indications métriques, décimétriques et centimétriques. L'installation des échelles se fait sur des supports fixes : fers IPN battus dans le lit, culée de point, quais, rives rocheuses, *etc.* L'échelle doit être installée de façon à être protégée des corps flottants qui pourraient l'endommager lors des crues. Par ailleurs, elle doit être à l'abri du battillage de façon que l'on puisse lire les niveaux de près. Une fois installées, les échelles seront nivelées et rattachées au nivellement général. Ainsi, au cas où une échelle serait endommagée, il sera possible d'en remettre une nouvelle à la même cote. Enfin, il faut que le zéro de l'échelle soit

toujours sous l'eau, même lors des étiages les plus sévères et après d'éventuels affouillements (des hauteurs négatives entraînent souvent des gênes dans le traitement informatique).

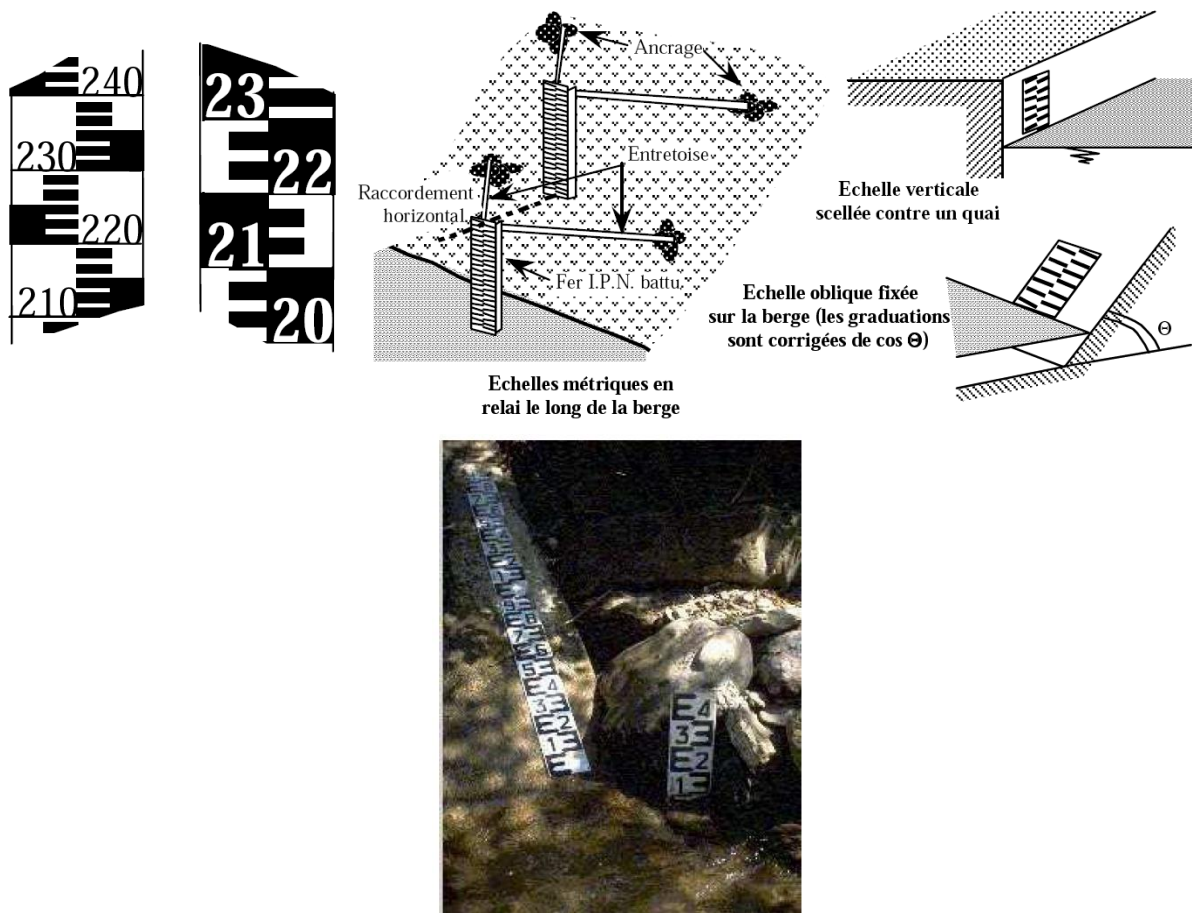


Fig.45 : Echelle pour mesurer le niveau H

VII.3.2.2 - Les limnigraphes à flotteur

Ces appareils ont pour but d'enregistrer les niveaux d'eau en fonction du temps. Parmi tous les types de limnigraphes, ceux à flotteurs sont les plus utilisés. Leur principe commun est très simple. Le capteur est un flotteur équilibré en partie par un contre-poids dont les déplacements sont liés à ceux du flotteur par un câble et une poulie. Les mouvements verticaux du flotteur sont transformés en mouvements de rotation de l'axe de la poulie. Cet axe entraîne, par un système d'engrenage, le déplacement transversal d'un stylet le long d'une tige filetée. Le stylet inscrit sur le papier d'un tambour ou d'une table déroulante dont le déplacement est proportionnel au temps. Les modèles sont très nombreux : ils se distinguent essentiellement entre les limnigraphes à tambour (à axe horizontal ou vertical) et à table déroulante. En général, le système d'engrenage permet différentes démultiplications : 1/1, 1/2, 1/5, 1/10, 1/20 (1/5 => 1 cm papier = 5 cm niveau).

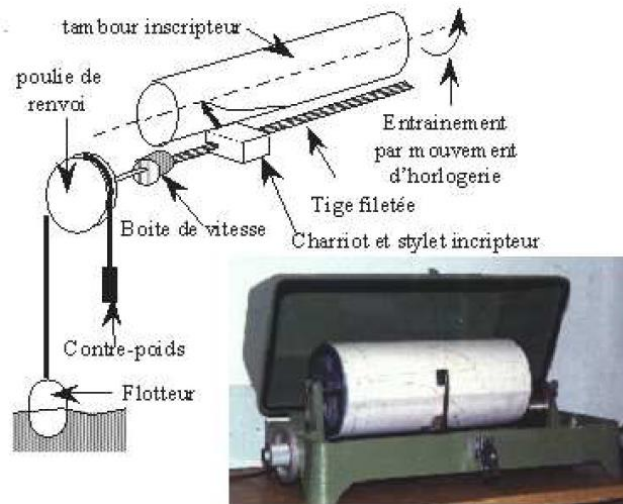


Fig.46 : limnigraphe à flotteur

Par ailleurs, de nombreux limnigraphes sont équipés d'un système dit "*à retournements*" : la tige filetée possède deux filetages l'un à pas à droite, l'autre à pas à gauche. Le chariot porte-stylet arrivant en bout de course repart en sens inverse ; il n'y a plus de limite à l'amplitude des mouvements du plan d'eau enregistrable. La figure ci-contre illustre un retournement en crue et un retournement en décrue. L'hydrogramme réel s'obtient par symétrie par rapport aux bords du papier.

Ces appareils sont souvent réglables en vitesse de rotation. Communément pour les tambours, les rotations se font en un jour, une semaine, deux semaines ou un mois ; pour les tables déroulantes, l'autonomie peut être de plusieurs mois. Le mécanisme d'horlogerie peut être entraîné soit par un ressort, soit par des piles électriques. Dans le choix de l'échelle de réduction et de l'autonomie, il faut trouver un compromis entre une bonne sensibilité verticale (réduction faible), mais une amplitude suffisante (forte réduction) pour mesurer toutes les hauteurs et entre une bonne lisibilité des temps (rotation rapide) et une autonomie grande (rotation lente). Dans tous les cas, il est conseillé de ne pas laisser plus d'un mois les appareils sans visite car les sources de panne sont nombreuses.

L'installation de ces appareils se fait à la verticale d'un puits de mesures dans lequel est situé le flotteur. Il est ainsi protégé du batillage et des corps flottants. Selon les cas et les circonstances, l'installation peut se faire soit en prise directe dans le cours d'eau, soit enterrée dans la rive avec un tube de prise.

Les inconvénients de ces appareils résident essentiellement dans :

- les possibilités de colmatage des tubes de prise (ce qui provoque un retard entre niveau dans le puits et cours d'eau) ;

- les possibilités de gel dans le tube ;
- le coût de l'installation du puits (puits enterré) ou le risque de mettre l'appareil à portée des crues (puits en prise directe).

Les avantages sont ceux d'un coût relativement modique de l'appareil lui-même, d'un mécanisme simple et robuste.

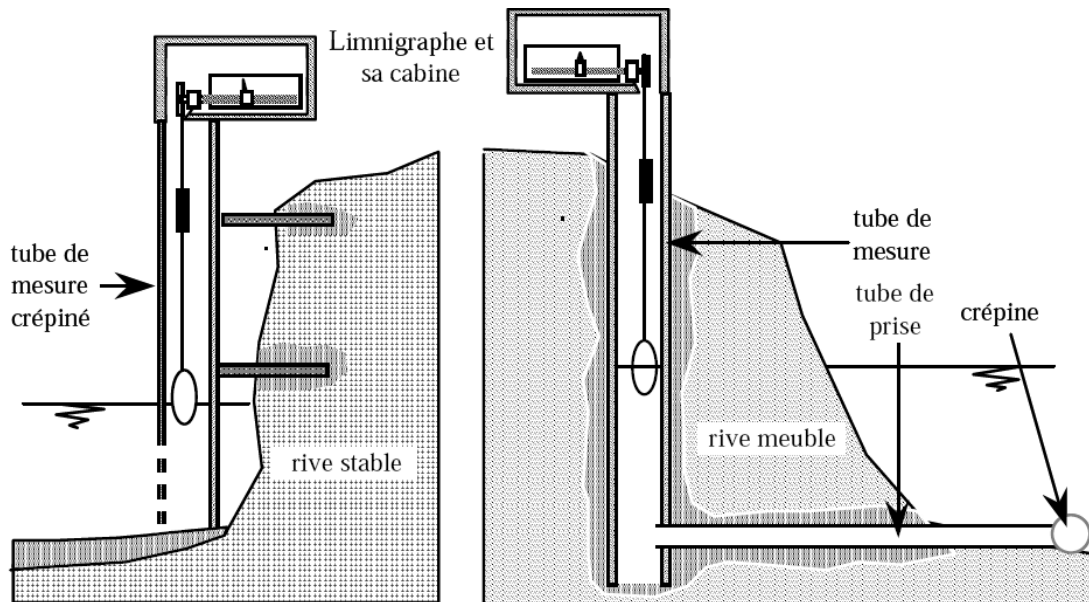


Fig .47 : Méthode d'installation de Limnigraphe sur terrain

VII.3.2.3 - Les limnigraphes dits à bulles

Ces appareils sont basés sur le principe d'une prise de pression au fond de la rivière. Une bouteille de gaz comprimé (azote ou air), munie d'un mano-détendeur, alimente le circuit gaz à débit constant. Le régulateur de débit est couplé avec un visualisateur ; on peut ainsi régler le débit constant à un écoulement "bulle à bulle". Le circuit gaz se poursuit jusqu'au fond de la rivière à partir de laquelle s'échappent les bulles de gaz. Sur ce circuit de gaz est branchée une prise de pression reliée à un manomètre à mercure (ou à une capsule manométrique). Le déplacement d'un stylet inscripteur sur une table déroulante est asservi par différents systèmes à la mesure de pression. Or, cette pression est égale à la pression qui règne au fond de la rivière $H_r g$ moins le poids de la colonne de gaz plus les pertes de charges dans le circuit gaz. Ces deux derniers termes sont constants (géométrie et débit donnés) et d'ailleurs négligeables.

La variation de pression est donc proportionnelle à la variation de niveau.

Les inconvénients de ces appareils résident :

- dans leur coût ;

- dans leur mécanique plus sophistiquée donc nécessité d'un entretien nécessitant un personnel plus qualifié ;
- dans l'astreinte d'une organisation d'un parc de bouteilles de gaz quoi que l'on puisse remplacer la bouteille de gaz par un compresseur électrique programmé pour une mise en route au moment de mesures préprogrammées dans le temps..

Les avantages sont cependant nombreux :

- L'appareil s'accommode très bien des eaux chargées (si la prise de pression se colmate, la pression du gaz montera jusqu'à déboucher la conduite ;
- l'appareil peut être installé à plusieurs dizaines voire centaines de mètres du cours d'eau (on peut le mettre hors crue) ;
- si on déplace la station, on récupère facilement tout le matériel (éventuellement, on perdra uniquement le tube du circuit de gaz).

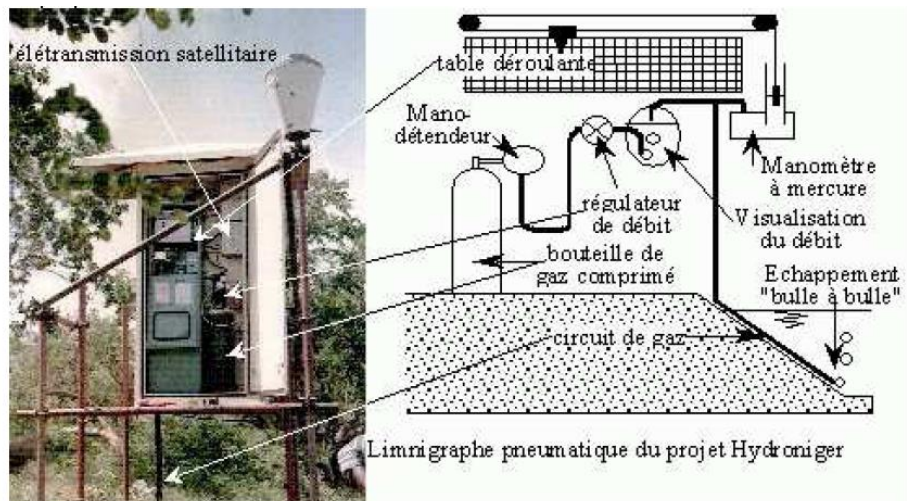


Fig.48 : limnigraphe à bulles

VII.3.2.4 - Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.)

Depuis la fin des années 1980 sont apparues sur le marché de nouveau type de capteurs piézorésistifs. Les déformations que subit le capteur sont dues à la pression (pression atmosphérique + ρgH) et à la température.

Une chaîne de traitement électronique est associée au capteur et délivre sous forme digitale la hauteur d'eau (au cm) et sa température. Le capteur est lui-même dans de l'huile maintenu à la pression de l'eau par une membrane souple.

Ce type d'appareil remplace progressivement les anciens limnigraphes à bulle ou à flotteur.

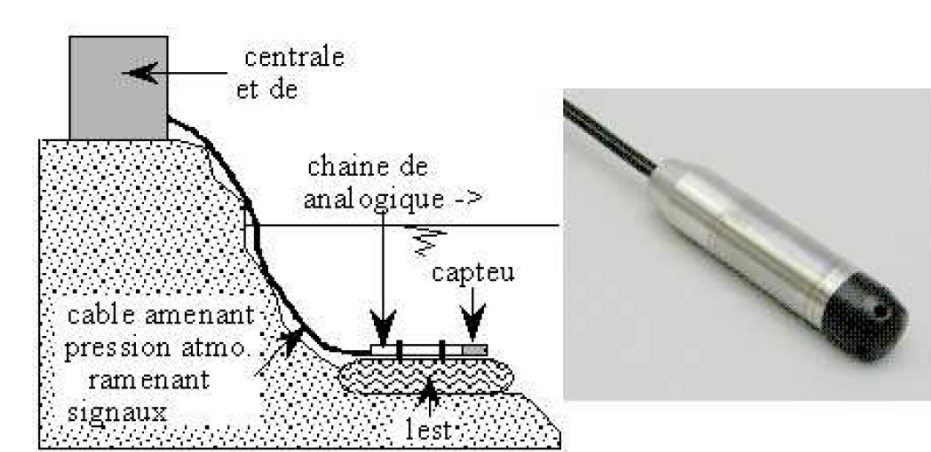


Fig.49 : Sondes piézorésistives immergées (S.P.I.)

VII.3.2.5 - Limnigraphes à ultra-sons

Ce type d'appareil est constitué d'un émetteur récepteur d'ultrasons, fixé à la verticale du plan d'eau. Le temps de parcours aller retour entre l'appareil et le plan d'eau permet de déterminer la distance x et par déduction la hauteur d'eau H puisque l'on connaît la position nécessairement fixe de l'appareil.

Ce type de limnigraphe nécessite la présence d'un pont stable ou la mise en place d'un portique.

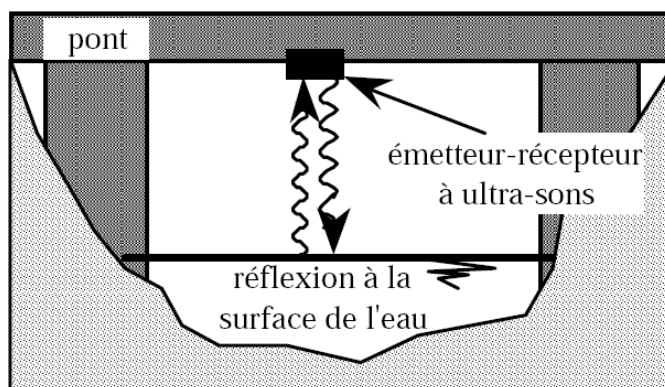


Fig.50 : Limnigraphes à ultra-sons

VII.3.3 - Les sections de jaugeage

Lorsque l'on choisit le site d'une station de jaugeage, le critère essentiel est l'existence d'un contrôle stable et sensible ; des critères d'accessibilité s'y ajoutent ; ce n'est qu'en dernier lieu que l'on considère les sections où on effectue les jaugeages. En effet, il n'est généralement pas nécessaire de faire le jaugeage dans la section même où on effectue la mesure de niveau.

Ayant donc choisi le contrôle, on prospectera vers l'amont et vers l'aval (à distance raisonnable bien sûr) les sites possibles pour effectuer les jaugeages. On peut imaginer plusieurs sites selon que l'on est en basses, moyennes ou hautes eaux. Ce dernier cas est

certainement celui qu'il faut le mieux prévoir car en période de crues, on ne dispose guère de temps à perdre. Dès l'installation de la station, on retiendra un site pour les jaugeages de crue (pont ou jaugeage en bateaux) et si nécessaire, on installera à demeure un câble pour une station téléphérique. Il faut absolument, pour des crues exceptionnelles, que l'équipe de jaugeage n'ait pas à hésiter sur le site de la mesure et sur la technique à employer. Ce n'est que dans ces conditions que l'on ne ratera pas la crue exceptionnelle.

VII.3.4 - Les courbes de tarage

Si on a pu réunir les conditions idéales d'installation d'une station de jaugeage, l'établissement d'une courbe de tarage ne devrait pas poser de difficultés particulières. Malheureusement, ces conditions idéales ne se rencontrent pas fréquemment !

La relation hauteur-débit pour une station avec une section de contrôle dépend à la fois de la hauteur critique H_c pour le débit considéré dans la section de contrôle, mais aussi au niveau normal à l'amont et de la distance à la section de contrôle.

La relation hauteur-débit dépend donc de la forme du lit et du coefficient de Strickler ; il n'est guère possible de préjuger de la forme mathématique que prendra cette relation. On se contente donc de reporter les couples hauteurs débits obtenus par jaugeage, sur un graphique millimétré ; le nuage de points permet d'évaluer la relation la plus probable.

En général, il est relativement aisé de tracer la courbe de tarage en eau ; par contre, le tarage est plus délicat en hautes et basses eaux.

Lorsque les eaux sont basses, on constate une diminution de la précision relative sur les débits. En effet, de faibles modifications du lit perturbent gravement la relation hauteur-débit. Il en est de même pour le développement de la végétation. Il est toujours difficile d'obtenir une bonne courbe hauteur-débit en étiage. Les remèdes sont, soit de multiplier les jaugeages d'étiage, soit d'aménager la station pour la mesure des débits de basses eaux. Il est parfois même impossible d'établir une véritable courbe de tarage.

En hautes eaux, le problème essentiel est celui de l'extrapolation de la courbe ; en effet, on enregistre au limnigraphe des hauteurs supérieures à celles correspondant aux jaugeages des plus grands débits. Comment extrapoler cette courbe ? Les solutions sont multiples mais pas toujours satisfaisantes.

Dans les cas les plus simples où la variation de la section est progressive avec la hauteur, on peut supposer que les différents paramètres varient comme des fonctions puissances de $(H - H_0)$, H_0 étant un paramètre dépendant du zéro de l'échelle. Pour extrapoler la courbe de tarage, on portera donc sur un papier log-log, les plus forts jaugeages en testant différentes valeurs de H_0 jusqu'à obtenir l'alignement.

Cependant, la section n'est pas toujours homogène et il est alors préférable d'extrapoler la courbe de tarage d'après par exemple, la formule de Strickler :

$$Q = k S(H) [RH(H)]^{2/3} I^{1/2}$$

$S(H)$ est la section mouillée pour une hauteur H ; $RH(H)$ est le rayon hydraulique. Ces deux fonctions sont déterminées par l'étude des profils en travers au voisinage de la section de mesures. On se contentera seulement d'extrapoler $k(H)$ et $I(H)$ d'après l'allure de ces courbes obtenues d'après les plus forts jaugeages réalisés. Il faut là-encore se méfier car une station peut très bien avoir plusieurs contrôles.

Comme le suggère la figure ci-dessous, en basses et moyennes eaux, c'est le contrôle A qui gouverne les hauteurs H ; par contre, si le débit augmente, le ressaut en aval de A va se rapprocher puis noyer le contrôle A ; la station est alors réglée par le contrôle B.

Dans les premières années de la vie d'une station, on multiplie les jaugeages de façon à établir au plus tôt une courbe de tarage précise.

Dans certaines conditions, on peut avoir une courbe parfaitement stable (pas de végétation, transport solide faible, lit parfaitement stabilisé) ; il suffit alors de procéder à quelques jaugeages de contrôle assez espacés dans le temps.

Bien souvent, les courbes ne sont pas stables surtout en basses eaux. En effet, l'influence de modifications du lit ou de la végétation perturbe beaucoup la relation hauteur-débit. On est alors obligé de multiplier les jaugeages et d'établir différentes courbes suivant les périodes de l'année. Généralement, ces courbes sont plus stables en hautes eaux.

On obtient donc des faisceaux de courbes de tarage auxquelles sont attachées différentes périodes de validité. Parfois même, pour les périodes d'étiage, il est impossible d'établir une courbe de tarage. On se contente alors d'interpoler les débits entre les jaugeages successifs en tenant compte d'une façon subjective du limnigramme.

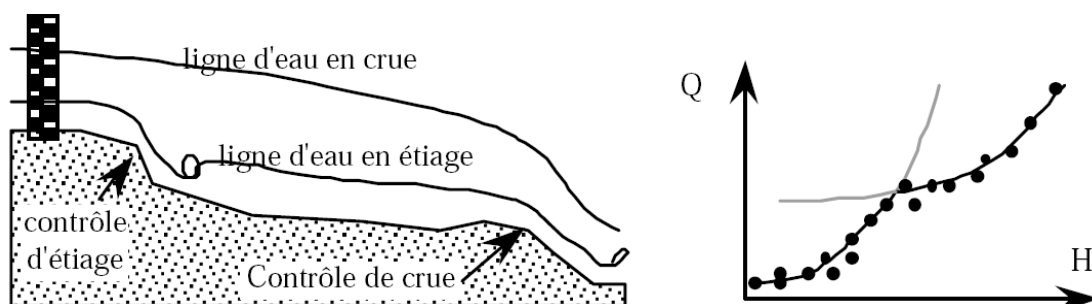


Fig.51 : Etablissement d'une courbe de tarage

VIII.- STATISTIQUES APPLIQUEES A L'HYDROLOGIE

Compte tenu de la grande variabilité de formation des lecteurs, il paraît utile de rappeler quelques résultats élémentaires de statistiques. Leur présentation dans le style "*parachutage de recette de cuisine*" était imposé par la nature même d'un cours d'hydrologie qui n'est pas un cours de statistique. Je m'en excuse par avance auprès de ceux que cette présentation pourrait choquer.

VIII.1. - RAPPELS ET GENERALITES

On appelle population un ensemble fini ou infini d'événements. Un échantillon est un sous-ensemble de la population. La taille de l'échantillon est le nombre d'événements qui le constituent. On dira qu'un échantillon est exhaustif lorsque sa taille est celle de la population. En hydrologie de surface, les populations sont généralement infinies et par conséquent, les échantillons sont non exhaustifs.

On appelle variable aléatoire (ou variate), le caractère numérique (ou non) qui distingue chaque événement de l'échantillon ou de la population. Dans l'utilisation que nous ferons des statistiques, nous aurons toujours affaire à des variates numériques discrètes ou continues. Elles seront discrètes si les valeurs numériques qu'elles peuvent prendre sont en nombre fini (par exemple nombre de jours de gel par an) ou en infinité dénombrable (nombre de crue par an). On dira qu'une variate est continue si ces valeurs numériques peuvent varier de façon continue (pluie journalière, débit, *etc.*). Ceci est le cas le plus fréquent, bien que l'on puisse remarquer que la précision des mesures limite la continuité de variation des valeurs numériques mesurées. Plus concrètement, si on mesure les pluies journalières au 1/10ème de millimètre, les pluies varieront de façon discrète avec un pas minimum de 1/10ème de millimètre.

Par ailleurs, les valeurs numériques x que peut prendre la variate X sont comprises entre deux bornes x_a et x_b finies ou infinies : $-\infty \leq x_a \leq x_b \leq +\infty$ L'intervalle (x_a, x_b) est appelé intervalle de variation de la variable aléatoire X .

VIII.1.2. - Notions de probabilité

Supposons que l'on puisse dénombrer l'ensemble E de toutes les éventualités également possibles et soit N le nombre de ces éventualités. Si parmi l'ensemble E , il n'existe que n éventualités favorables à un événement e , on dira que la probabilité de voir arriver l'événement e est la suivante :

$$\Pr ob(e/E) = \frac{n}{N}$$

Malheureusement pour nous, il est bien souvent impossible de dénombrer l'ensemble E et nous devons nous contenter d'une approche expérimentale. En effet, soit une série d'expériences à partir de laquelle on observe un intervalle E' (de taille N') d'éventualités. Parmi ces expériences on observe n' réalisations de l'événement e ; nous définirons alors la fréquence relative de l'événement e comme :

$$f = \frac{n'}{N'}$$

En général, on peut admettre que si la taille N' augmente, la fréquence relative f se stabilise et tend sur la probabilité Prob (e/E) :

$$\text{Prob (e/E)} = \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{n}{N'}$$

VIII.1.3. - Résultats fondamentaux

Dans ce qui suit, nous simplifierons l'écriture en remplaçant P (e/E) par P (e). La probabilité de réalisation de l'événement a parmi l'ensemble E, sachant que l'événement b est déjà réalisé, est notée :

P (a/b)

* Si la réalisation de b exclut celle de a, on a : P (a/b) = 0.

* Si la réalisation de b entraîne nécessairement celle de a : P (a/b) = 1.

* Si on note (a+b) l'événement consistant en la réalisation de a ou de b, et (a,b) la réalisation de a et de b, nous

Aurons les relations suivantes :

$$P = (a+b) = P (a) + P (b) - P (a.b)$$

$$P (a.b) = P (a) . P (b/a) = P (b) . P (a/b)$$

VIII.2. LA LOI DE PROBABILITE

VIII.2.1. - Notion de loi de probabilité

Si la variable aléatoire X est une variable numérique, on peut considérer comme événement e favorable, le fait que X soit inférieur ou égal à une valeur x de E. La probabilité de voir arriver cet événement est une fonction numérique de x, comprise entre 0 et 1 et que l'on appelle fonction de répartition F (x) :

$$F (x) = \text{Prob (X} \leq x) = \text{Prob (e/E)}$$

Cette loi de probabilité doit être monotone, non décroissante, et varier de 0 à 1 lorsque x décrit de xa à xb l'intervalle de définition de la variate X.

VIII.2.1.1 - Cas des variantes discrètes

Dans ce cas, la fonction de répartition varie par plage dont la distance représente la probabilité P_i de voir $X = x_i$.

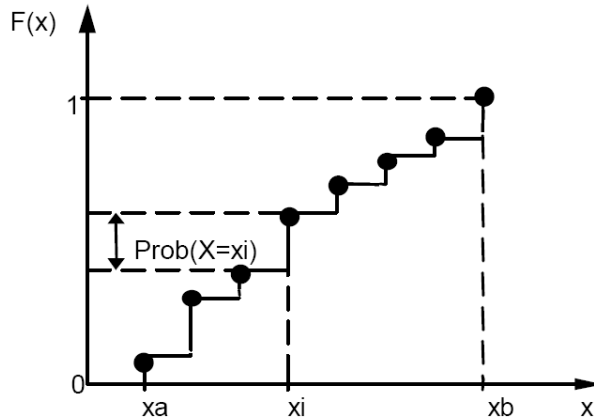


Fig. 52 : Variable discrète

VIII.2.1.2 - Cas des variantes continues

La fonction de répartition $F(x)$ est alors une fonction continue. Dans le cas général où cette fonction est dérivable, on appellera la dérivée $f(x)$ de $F(x)$ par rapport à x , densité de probabilité. On a alors les relations suivantes :

$$F(x_i) = \int_{x_a}^{x_i} f(x) dx$$

$$F(x_{i+1}) = \int_{x_a}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$\text{Prob}(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$F(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

Dans le cas de variables continues, il est ainsi impossible d'associer une probabilité non nulle à l'apparition d'une valeur particulière de X

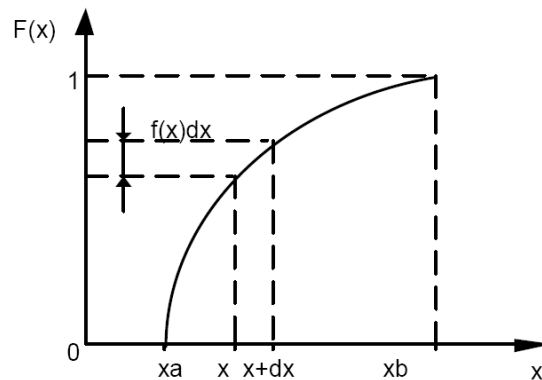


Fig. 53 : Variable continue

VIII.2.2. - Construction d'une loi de probabilité

Une loi de probabilité se définit d'une part par sa formulation mathématique, ce qui distingue les différents types de lois, et d'autre part, par les valeurs des paramètres qui entrent dans la formulation mathématique et qui sont estimés d'après l'échantillon observé.

En hydrologie, nous nous limiterons à l'emploi de cinq à six types de lois unimodales ou amodales, chacune de ces lois ne dépendant que de trois paramètres au plus. Ces paramètres peuvent être les suivants :

VIII.2.2.1 - Des paramètres de forme

Comme on le verra plus loin, ces paramètres peuvent caractériser l'aplatissement, l'asymétrie, *etc.* de la loi de distribution. Selon le type de loi, on peut avoir 0 (loi de Gauss), 1 (lois exponentielles généralisées) ou 2 (loi bêta incomplète) paramètres de formes.

VIII.2.2.2 - Des paramètres d'échelle s

Ce paramètre caractérise les variations de la variable X . Selon les cas, on pourra introduire comme paramètre d'échelle, chacun des paramètres de dispersion.

VIII.2.2.3 - Des paramètres de position x_0

Il situe dans quelle zone s'effectuent les variations de X . On utilise bien souvent une des valeurs centrales de la population (moyenne, mode) ou une des bornes de l'intervalle de variation (x_a , x_b).

VIII.2.2.4 - Variable réduite

On ramène bien souvent l'écriture de la loi de probabilité $F(x)$ à l'écriture d'une loi plus simple $F(u)$, en remplaçant x par sa variable réduite u :

$$u = \frac{X - X_0}{s}$$

VIII.2.3. - Paramètres définis d'après cette loi

Nous allons supposer à présent que nous connaissons parfaitement la probabilité et l'intervalle de définition d'une variable X . A partir de cette distribution théorique, on définira les paramètres suivants :

VIII.2.3.1 - Paramètres de tendance centrale

- La moyenne m est définie par l'expression suivante :

$$m = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx$$

- Le mode m_0 est la valeur de x qui est la plus fréquente (variable discrète) ou qui a la plus forte densité de probabilité. Nous avons dit plus haut que nous n'emploierons que

des lois unimodales ou amodales. Dans ces conditions, la densité de probabilité sur l'intervalle x_a et x_b ne doit présenter qu'un seul maximum :

$$f'(m_0) = 0 \quad x_a \leq m_0 \leq x_b$$

- La médiane m_e est la valeur qui divise la population en deux sous-populations équiprobables :

$$\int_{x_a}^{m_e} f(x) dx = \int_{m_e}^{x_b} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Dans les lois que nous utiliserons, ces trois paramètres se rencontrent dans l'ordre croissant (ou décroissant) suivant :

$$x_a \leq \text{mode} \leq \text{médiane} \leq \text{moyenne} \leq x_b$$

$$x_a \leq \text{moyenne} \leq \text{médiane} \leq \text{mode} \leq x_b$$

- On utilisera parfois les notions de moyennes harmonique et géométrique.

La moyenne harmonique est définie ainsi :

$$m_h = \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{X} f(x) dx$$

Elle peut être considérée comme le moment d'ordre -1 et elle n'a de sens que si $x_a \geq 0$ ou $x_b \leq 0$ et si $f(0) = 0$.

La moyenne géométrique a pour expression :

$$L_n(m_g) = \int_{x_a}^{x_b} \ln(x) f(x) dx$$

Cette définition n'a de sens que si $x_a > 0$.

VIII.2.3.2 – Moments

On définit le moment d'ordre k , m_k , par la relation :

$$M_k(m_g) = \int_{x_a}^{x_b} x^k \ln(x) f(x) dx$$

Cette définition des moments est bien souvent gênante et on préfère utiliser la notion de moment centré d'ordre k , μ_k :

$$\mu_k = \int_{x_a}^{x_b} (X - \bar{X})^k f(x) dx$$

Dans cette expression, \bar{x} représente la moyenne définie plus haut.

On peut dès à présent noter les résultats suivants concernant les premiers moments :

Le moment d'ordre 1 n'est autre que la moyenne :

$$m_1 = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx = m$$

- Le moment centré d'ordre 1 est nul :

$$\mu_1 = \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} m f(x) dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} x f(x) dx = m_1 ; \int_{x_a}^{x_b} m_1 f(x) dx = m_1 \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx ; \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

- Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance :

$$\mu_2 = \int_{x_a}^{x_b} x^2 f(x) dx = m_2 - m_1^2$$

On définit l'écart-type σ comme : $\sigma = \sqrt{\mu_2}$.

Les premiers moments centrés sont liés aux moments non centrés par les expressions :

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$m_2 = \mu_2 + m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3 m_1 m_2 + 2 m_1^3$$

$$m_3 = \mu_3 + 3 m_1 \mu_2 + m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4 m_1 m_3 + 6 m_1^2 m_2 - 3 m_1^4$$

$$m_4 = \mu_4 + 4 m_1 \mu_3 + 6 m_1^2 \mu_2 + m_1^4$$

L'intervalle de variation I.V. :

Il se définit à partir des bornes x_a et x_b : I.V. = $x_b - x_a$

Bien souvent, ce paramètre n'a guère de sens (bornes infinies, valeurs proches des bornes extrêmement rares, *etc.*) et on lui préfère un des paramètres suivants :

- L'intervalle inter-quantiles :

C'est l'intervalle entre deux valeurs particulières de X telles que le pourcentage de valeurs inférieures à la plus petite soit égal au pourcentage de valeurs supérieures à la plus grande.

On travaille souvent par exemple à partir des quantiles Q_1 et Q_2 définis comme suit :

$$\int_{x_a}^{Q_1} f(x) dx = \int_{Q_2}^{x_b} f(x) dx = 0,25$$

L'intervalle inter-quantiles ($Q_2 - Q_1$) contient 50 % de la population. On peut définir également les 4 quintiles, les 9 déciles, *etc.*

- Ecart absolu moyen e_a :

C'est la moyenne des valeurs absolues des déviations ($x - \bar{x}$) :

$$e_a = \int_{x_a}^{x_b} |x - \bar{x}| f(x) dx$$

- Variance μ_2 et écart-type σ :

Ces paramètres déjà définis, sont les plus usités :

$$\mu_a = \int_{x_a}^{x_b} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \sigma^2$$

- Coefficient de variation CV :

Ce paramètre, très usité, se définit comme suit à partir de la moyenne m_1 et de l'écart-type

$$CV = \frac{s}{m_1}$$

VIII.2.3.3 - Paramètres caractéristiques de la forme

Parmi les très nombreux paramètres de formes, nous n'utiliserons que les coefficients β_1 et β_2 de Pearson.

• Mesure de la dissymétrie :

Pearson propose d'utiliser le coefficient β_1 non borné : $\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

* Si β_1 est positif, la distribution est étalée sur la droite ; on observe la succession mode-médiane-moyenne et la dissymétrie est dite positive.

* Si β_1 est négatif, la distribution est étalée sur la gauche ; on observe la succession moyenne-médiane-mode et la dissymétrie est dite négative.

* Si β_1 est nul, la dissymétrie n'est pas forcément symétrique (mais si la distribution est symétrique, on a $\beta_1 = 0$).

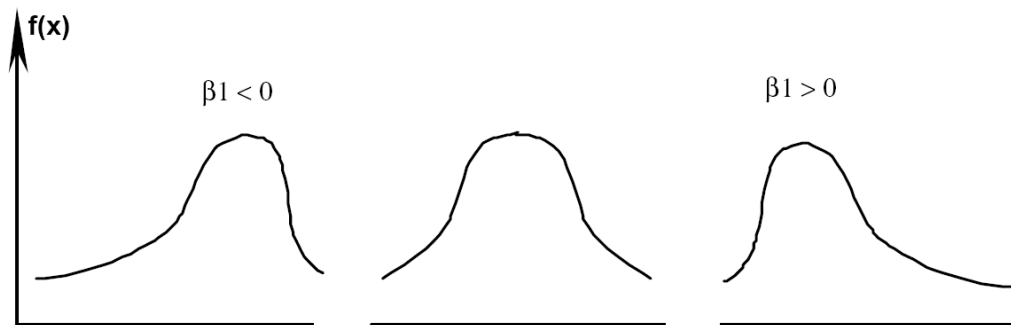


Fig. 54 : Sens de la symétrie

• Mesure de l'aplatissement :

Pearson propose d'utiliser le coefficient β_2 , borné inférieurement par la valeur -2. telle que :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

* Si β_2 est négatif, la distribution est plus aplatie que la distribution normale ; la distribution est dite platicurtique.

* Si β_2 est positif, la distribution est moins aplatie que la distribution normale ; la distribution est dite leptocurtique.

* Si $\beta_2 = 0$, l'aplatissement est le même que pour la loi normale et la courbe est dite mésocurtique.

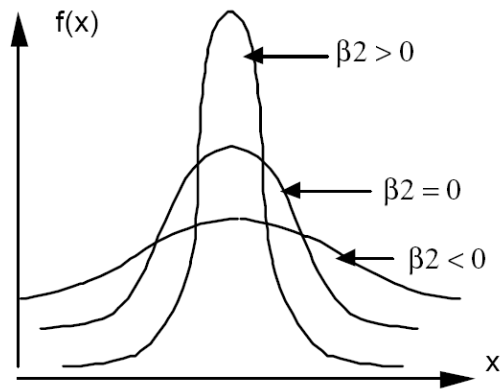


Fig.55 : Les différents aplatissement de β_2

VIII.3. - DETERMINATION DES PARAMETRES D'APRES UN ECHANTILLON

Nous ne connaissons jamais en hydrologie, la population totale mais nous ne disposons que d'échantillons non exhaustifs tirés dans cette population. A partir de cet échantillon, nous nous proposons de choisir la forme mathématique de la loi de probabilité (problème de bonne **adéquation**) et d'en calculer le mieux possible les paramètres numériques de cette loi (problème d'**ajustement**).

VIII.3.1. - Qualité des estimations

Supposons que l'on cherche à déterminer un paramètre λ de valeur inconnue. On dispose pour cela d'un échantillon de n valeurs tirées dans la population des X : (x_1, x_2, \dots, x_n) .

λ est estimé par la fonction des différents éléments de l'échantillon : $I = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

La fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'**estimateur** et la valeur I prise par cette fonction pour un échantillon donné est l'**estimation**

Si on multiplie le tirage d'échantillon de taille n , on obtiendra une série de réalisations I qui peuvent être considérées comme des valeurs d'une variable aléatoire L .

On dira que l'estimation $I = f(x_1, \dots, x_n)$ est une estimation **consistante (ou correcte)** de λ si la variable aléatoire L vérifie les conditions suivantes lorsque n croît indéfiniment :

$$\left. \begin{array}{l} E(L) = \lambda \\ \text{VAR}(L) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } n \rightarrow \infty \left[\begin{array}{l} - \text{ la valeur limite de l'espérance mathématique de } L \text{ est } \lambda \\ - \text{ la valeur limite de la variance de } L \text{ est nulle.} \end{array} \right.$$

L'estimation sera **absolument correcte** (ou **sans biais**) si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} E(L) = \lambda \quad \forall n \\ \text{VAR}(L) = 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

Il peut exister plusieurs estimations absolument correctes ; parmi elles, celle qui prend le mieux en compte l'échantillon et qui donne la variance minimale (pour n donnée) des L est dite "**estimation efficace**" (ou exhaustive).

VIII.3.2. - Tests d'ajustement

Comme nous l'avons déjà dit, nous ne connaissons qu'un échantillon de la population à étudier.

D'après cet échantillon, nous choisirons la formulation mathématique de la loi de probabilité et nous calculerons les paramètres numériques de cette loi. On peut alors se demander quelle est la probabilité pour que la loi retenue représente effectivement la population mère dont l'échantillon est *a priori* représentatif.

En testant cette hypothèse, on court deux risques :

- un risque de première espèce qui consiste à rejeter à tort l'hypothèse alors qu'elle est vraie. La probabilité de ce risque est appelée niveau de signification à α %. Elle est définie par la valeur numérique du test, α étant toujours exprimé en probabilité au dépassement de cette valeur numérique ;
- un risque de deuxième espèce qui est d'accepter à tort l'hypothèse alors qu'elle est fautive. La probabilité de ce risque étant β , on appelle puissance du test la valeur $(1 - \beta)$.

VIII.3.2.1 - Test du χ^2 de Pearson

Parmi tous les tests existants, le test du χ^2 de K. PEARSON est le plus pratique et le plus utilisé bien qu'il ne soit pas très puissant.

Pour mettre en oeuvre ce test, on procède de la façon suivante :

- on découpe l'échantillon de n éléments, en K classes ($K > 4$) de façon à ce que chaque classe contienne théoriquement plus de 5 éléments ;
- soit n_i le nombre d'éléments contenus dans la i ème classe et n'_i (> 5) le nombre théorique qui devrait s'y trouver ; on forme le terme suivant :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

Cette variable χ^2 suit une loi de probabilité dite loi du χ^2 , à v degrés de liberté avec :

$$v = K - p - 1$$

K = nombre de classes ;

p = nombre de paramètres estimés d'après l'échantillon.

Les tables données en annexes permettent de connaître la valeur numérique du χ^2 qui a $\alpha\%$ de chance d'être dépassé par le seul fait du hasard, en fonction des valeurs de v .

Si par exemple on ajuste à une loi de Gauss (1 paramètre de tendance centrale, un paramètre de dispersion) un échantillon découpé en 5 classes et que le χ^2 calculé est égal à 3,7, est-ce que cette loi peut caractériser la population totale ?

Nous avons : $v = 5 - 2 - 1 = 2$.

Si nous nous fixons un seuil α de 5 %, nous trouvons dans les tables qu'il y a moins de 5 % de chance d'obtenir par hasard un χ^2 supérieur à 5,99. C'est-à-dire que même si la concordance était parfaite, il y aurait 5 % de chance que le χ^2 dépasse 5,99. Il n'y a donc pas lieu de remettre en cause cet ajustement.

VIII.3.2.2 - Test W_n^2 d'Anderson

Ce test, un peu plus fastidieux à mettre en oeuvre (tout au moins manuellement), est plus efficace que le test du χ^2 . Analogue dans son esprit, il favorise les valeurs extrêmes et considère individuellement chaque élément de l'échantillon.

Soit un échantillon de taille n où x_i est la i ème valeur dans l'échantillon classé par ordre croissant ; on peut estimer pour chaque x_i , sa fréquence théorique au non-dépassement $F(x_i)$ à partir de l'ajustement que l'on désire tester. On construit alors ainsi W_n^2 :

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((2i - 1) \text{Ln}[F(x_i)] + (2n - 2i + 1) \text{Ln}[F(x_i)])$$

La variable u définie comme suit à partir de W_n^2 permet de caractériser la qualité de l'ajustement :

$$u = \frac{\text{Ln}[W_n^2 - 0,18/n^{1/4}] + 0,8 + 1/\sqrt{n}}{0,65} \quad (n \geq 10)$$

L'ajustement est d'autant satisfaisant que u est faible et on pourra utiliser les seuils de rejets suivants :

Seuil	20 %	10 %	5 %	1 %
u_{seuil}	0,84	1,28	1,64	2,32

VIII.3.2.3 - Autres tests

D'autres tests sont susceptibles d'être utilisés en particulier le test des suites et le test de Kolmogorov.

Leur emploi est moins fréquent en hydrologie et nous renvoyons pour leur description aux ouvrages classiques de statistiques.

Il faut également citer la publication d'un test par M. BRUNET-MORET dans les cahiers ORSTOM en 1978. Ce test paraît séduisant car construit pour des données hydrologiques, mais les applications en sont encore peu répandues.

VIII.3.3. - Moments déduits d'un échantillon de taille connue

On utilisera les estimations suivantes :

- de la moyenne m_1 par : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

- des moments d'ordre r par : $m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$

ou les estimations absolument correctes (moments centrés):

- d'ordre 2 (variance) μ_2 par : $V = \frac{1}{(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \right]$

- d'ordre 3 par : $\mu_3 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \left[n \sum_{i=1}^n x_i^3 - 3 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 \right]$

VIII.3.4 - Méthodes d'ajustement

Le problème consiste à déterminer les paramètres d'une loi (dont la formulation a déjà été choisie) en fonction de l'échantillon observé.

VIII.3.3.1 - Méthode des moments

Cette méthode consiste à estimer d'après l'échantillon autant de moments que la loi a de paramètres et à égaliser ces estimations aux valeurs théoriques qui ne sont fonctions que des paramètres à estimer. On obtient alors un système de n équations à n inconnues.

Les estimations ainsi obtenues sont généralement consistantes mais non efficaces.

VIII.3.3.2 - Méthode du maximum de vraisemblance

Dans le cas d'une loi discontinue où on a observé un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) , chaque valeur ayant une probabilité (P_1, P_2, \dots, P_n) , la probabilité P de voir apparaître cet échantillon est : $P = P_1 * P_2 * \dots * P_n$

Dans le cas de lois continues, P_1, P_2, \dots, P_n sont infiniment petits. On admet alors que la vraisemblance de l'échantillon est égale au produit des densités de probabilité :

$$P = K f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

$$L = \frac{P}{K}$$

$$L = f(x_1, a, b, \dots, k) f(x_2, a, b, \dots, k) f(x_n, a, b, \dots, k)$$

a, b, \dots, k sont les k paramètres de la loi. On se propose de choisir ces paramètres de façon à ce que la vraisemblance de l'échantillon soit maximale. Pour cela, on écrit que la dérivée partielle de L par rapport aux k paramètres successifs est nulle :

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0$$

avec $l = a, b, \dots, k$.

On obtient ainsi un système de k équations à k inconnues.

Il est bien souvent plus simple d'effectuer les transformations suivantes :

$$\text{Log } L = \sum_{i=1}^n \log f(x_i) \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x)}{\partial a} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x)}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

La méthode du maximum de vraisemblance donne des estimations correctes et efficaces et souvent absolument correctes.

Cependant, on se gardera d'utiliser cette méthode dans le cas où l'intervalle de variation de la variante correspond à des bornes finies pour lesquelles la densité de probabilité n'est pas nulle (dans ce cas, on peut rencontrer non pas un maximum mais un minimum de probabilités).

VIII.3.3.3 - Ajustement graphique

Cette méthode consiste à porter dans un graphique les valeurs x de l'échantillon en fonction de leur fréquence expérimentale, les axes de ce graphique étant gradués de façon à ce que les points soient alignés si le choix de la loi est correct.

Graphiquement, on fait passer une droite dans le nuage de points et on détermine ainsi deux paramètres. Des lois à trois paramètres pourront aussi être ajustées, le troisième paramètre servant à provoquer l'alignement mais par tâtonnements.

VIII.4. - STATISTIQUE DE RANG

VIII.4.1. - Probabilité des valeurs d'un échantillon observé

1) La loi de distribution de la population mère est connue (par son expression mathématique et les valeurs numériques des paramètres). On démontre alors que la loi de distribution des fréquences au non-dépassement F_i , associées aux valeurs de rang i , est une loi Béta incomplète de moyenne $F_i = \frac{i}{n+1}$. Cette formule est parfois employée pour calculer une fréquence expérimentale mais il serait alors plus judicieux d'utiliser non pas la valeur moyenne de F_i mais sa valeur médiane. Une valeur bien approchée de la médiane est donnée par la formule :

$$F_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$$

2) La loi de distribution est adaptée à l'échantillon. (On choisit *a priori* le type de formulation, mais un au moins des paramètres est déterminé à partir de l'échantillon.) On démontre dans ce cas, qu'une solution approchée est donnée par la formule :

$$F_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$$

En hydrologie, les observations des pluies-débits relèvent toujours de cette seconde hypothèse.

3) Cas mixte :

On a observé des crues durant 20 ans et on connaît les trois plus fortes crues enregistrées durant les 50 ans précédents. Comment voir si ces trois valeurs sont compatibles avec ce que l'on a pu constater sur les 20 dernières années ?

On choisit le type de loi et on ajuste les paramètres à partir de l'échantillon de 20 ans. On portera donc les valeurs des crues en fonction des fréquences calculées par $F_1 = \frac{i - 0,5}{n}$. On est ensuite ramené au cas 1 et on calculera pour les trois autres valeurs, les fréquences par $F_1 = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$.

VIII.4.2. - Danger d'apparition

VIII.4.2.1 - Période de retour

Par définition la probabilité est le rapport du nombre d'événement favorable au nombre total d'événement. Souvent à un événement est associé une durée (il y a par exemple une crue maximale annuelle chaque année). La fréquence peut alors se définir également comme étant le nombre d'événement favorable sur le nombre total de durées. On définit alors la période de retour T (au temps de récurrence) comme l'inverse de la fréquence au non-dépassement F (ou de la fréquence au dépassement F1 si F1 est inférieur à 0,5).

$$T = \frac{1}{F_1} \quad (\text{si } F_1 < 0,5)$$

$$F = 1 - F_1$$

$$T = \frac{1}{F} \quad (\text{si } F < 0,5)$$

Les fréquences ont pour unité (T)-1, puisque l'on associe généralement une durée à chaque événement. La période de retour a donc la dimension d'un temps.

Exemple :

Si on a établi la statistique des crues maximales annuelles (un débit par an), la crue de fréquence au non dépassement 0,9 a une période de retour de : $T = \frac{1}{1 - 0,9} = 10$ ans

En moyenne, cette crue est dépassée une fois tous les dix ans.

Cependant, la crue de fréquence au non-dépassement 0,1 a, elle aussi, une période de retour de 10 ans, mais on dira que cette crue est non-dépasseée en moyenne une fois tous les dix ans.

VIII.4.2.2 - Fréquence d'apparition d'une valeur connue "a priori"

Quelle est la probabilité P de rencontrer au moins une fois, une valeur supérieure au quantile x_F sur n observations ?

Soit P1 la probabilité de ne jamais rencontrer $x > x_F$ sur ces n observations ; on a alors :
 $P1 + P = 1$.

Pour ne jamais rencontrer $x > x_F$, on doit avoir $x < x_F$ à la première observation, $x < x_F$ à la seconde... Or, chaque hypothèse est vérifiée avec une probabilité F (F : fréquence au non-dépassement) ; donc : $P1 = (F)^n$ d'où $P = 1 - (F)^n$

VIII.4.2.3 - Problème inverse

Bien souvent, le problème inverse se pose à l'hydrologue et connaissant la probabilité P, on cherche la valeur x_F qui a la probabilité P d'être atteinte au moins une fois en n années. On désire protéger un chantier qui doit durer n années. Quel débit de crue doit-on pouvoir évacuer dans le canal latéral pour qu'il n'y ait qu'une probabilité P pour que le chantier soit noyé ? $P = 1 - (F)^n$ soit $F = (1 - P)^{1/n}$

Le canal doit pouvoir évacuer la crue de fréquence au non-dépassement F.

VIII.5. - DIFFERENTS TYPES DE LOIS UTILISES EN HYDROLOGIE

Nous nous contenterons de signaler les lois les plus fréquemment utilisées. Ces lois n'ont que trois paramètres au plus, et bien souvent, que deux.

VIII.5.1. - Loi de Gauss ou loi normale

VIII.5.1.1 - Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^u e^{-u^2/2} du \quad \text{avec} \quad u = \frac{x - \bar{X}}{\sigma_x}$$

u est appelée variable réduite de Gauss. L'intervalle de définition est donc : $x \in]-\infty, +\infty [$
Cette loi est symétrique ($\beta_1 = 0$) et présente, par définition, l'aplatissement moyen ($\beta_2 = 0$).

Le tableau ci-dessous donne la fréquence au non-dépassement de u.

La table correspond aux valeurs de u positive, si u est négatif, la probabilité au non-dépassement est le complément à 1 de F (|u|).

Le paramètre de tendance centrale \bar{x} et à la fois la moyenne, le mode et la médiane. Le paramètre de dispersion σ_x est l'écart-type (racine carrée de la variance).

Tab. 13 : fréquence au non-dépassement de u

$F(u) = \text{Prob}(U \leq u)$

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8483	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9013
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9662	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Le paramètre de tendance centrale \bar{x} et à la fois la moyenne, le mode et la médiane. Le paramètre de dispersion σ_x est l'écart-type (racine carrée de la variance). La densité de probabilité a pour expression :

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La dérivée première s'annule pour $u = 0$ (valeur modale) et la dérivée seconde pour $u \pm 1$.

La fonction de densité est représentée par la courbe "en cloche" symétrique par rapport au mode $u = 0$ et avec des points d'inflexion pour $u \pm 1$.

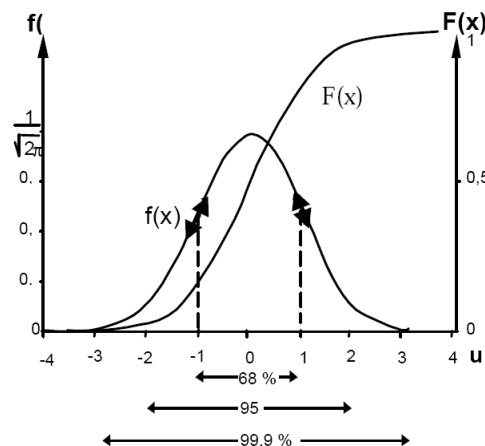


Fig. 56 : Fonction de densité

VIII.5.1.2 - Estimation des paramètres

α) Méthode des moments :

On obtient immédiatement les estimations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ et } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

b) Méthode du maximum de vraisemblance :

Cette méthode conduit à une autre estimation de l'écart-type :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Elle est consistante mais moins correcte que la précédente que l'on préférera donc.

c) Ajustement graphique :

A chaque élément de l'échantillon, on associe une fréquence expérimentale au non-dépassement :

$$F(x_i) = \frac{i - 0,5}{n}$$

A chaque valeur de $F(x_i)$ correspond une valeur de u . Pour chaque élément de l'échantillon, on peut porter dans un graphique gradué en abscisse selon les valeurs de u et en ordonnée selon la variable x , un point de coordonnées $(\frac{i-0,5}{n}, x_i)$.

Si les valeurs de x_i sont distribuées normalement, les points s'alignent sur une droite d'équation : $x_i = \bar{x} + u_i \sigma_x$, appelée droite de Henry. D'après cette droite, on détermine la moyenne \bar{x} puisque pour $u = 0$, on a $x = \bar{x}$, et l'écart-type en faisant par exemple $u = 2$, donc $x = \bar{x} + 2\sigma_x$.

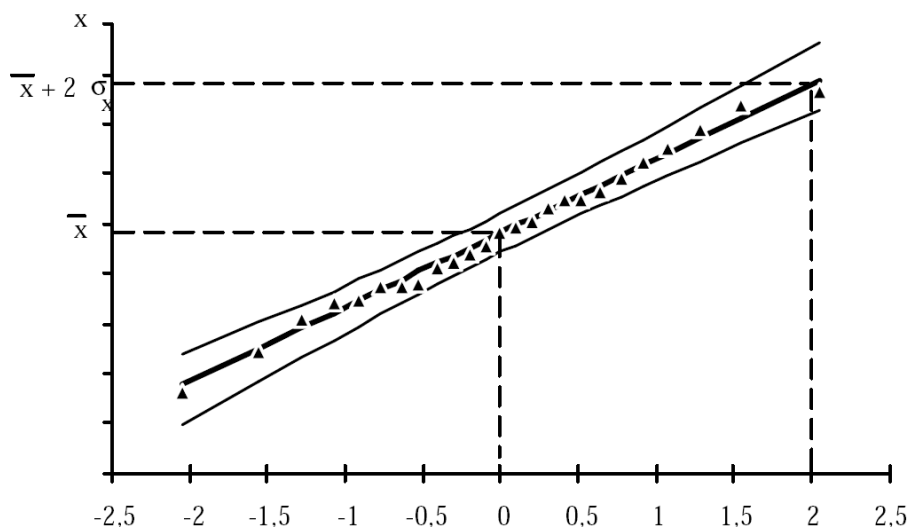


Fig.57 : Variable réduite de Gauss

Ajustement graphique à une loi de Gauss.

Pour ce faire, on peut utiliser les tables de la fonction de Gauss ou approcher la fonction de Gauss par la formule polynomiale suivante :

• Pour $F \leq 0,5$:

$$-u = x - \frac{2.515517 + .802853 x^1 + 0.010328 x^2}{1 + 1.432788 x^1 + 0.189269 x^2 + 0.001308 x^3} \quad \text{avec} \quad x = \sqrt{\text{Ln} \frac{1}{F^2}}$$

Cette approximation permet une programmation facile et provoque des erreurs sur W toujours inférieures à 0.00045 !

• Pour $F > 0,5$:

On fera $F = 1 - F$ et $u = -u$

Parfois, on est amené au contraire à calculer F pour u donnée.

On pourra utiliser la formule suivante pour le calcul automatique :

- Pour $u \geq 0$:

$$F(u) = 1 - \frac{0,5}{(1 + 0,196854x^1 + 0,115194x^2 + 0,000344x^3 + 0,019527x^4)^4}$$

L'erreur sur F est toujours inférieure à $2,5 \cdot 10^{-4}$.

- Pour $u < 0$ on fera $u = -u$ et $F = 1 - F$

VIII.5.1.3 - Erreurs-types sur les estimations

a) Estimation de la moyenne :

Soit x_m la moyenne de la population mère et \bar{x} et σ_x la moyenne et l'écart-type estimés d'après un échantillon de taille n , la valeur t définie par...

$$t = \frac{x_m - \bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \quad (v = n - 1)$$

suit une loi de Student à v degré de liberté. Cette loi symétrique est plus "pointue" que la loi de Gauss. Dès que n atteint 30, on peut confondre la loi de Student et la loi de Gauss.

b) Estimation de l'écart-type :

Soit V la variance de la population-mère et σ^2 la variance estimée d'après un échantillon de taille n , la valeur χ^2 .

$$\chi^2 = \frac{nV}{\sigma^2}$$

suit une loi du χ^2 à $v = n - 1$ degré de liberté. Dès que n atteint 50, on peut admettre que la valeur.

$$t = \frac{V - \sigma^2}{\frac{\sigma^2}{2n}}$$

suit une loi de Gauss centrée réduite.

c) Estimation d'un quantile :

Dans le cas où l'échantillon est grand ($n > 30$), on peut admettre en première approximation que la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X sont distribués normalement avec des variances

$$\frac{\sigma^2}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma^2}{2n} .$$

Le quantile x_F est estimé par l'expression : $\hat{X}_F = \bar{X} + u_F \sigma_X$

On admet alors que si x_F est le véritable quantile \hat{X}_F et son estimation à partir d'un échantillon de taille n , \hat{X}_F suit une loi de Gauss de moyenne x_F et d'écart-type σ_{X_F} avec :

$$\sigma_{X_F} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{2n}} \sqrt{u_F^2 + 2}$$

On admet que la variance sur $F \hat{x}$ est égale à la somme de la variance sur \bar{x} et de la variance sur $u_F \sigma_x$.

$$\text{Var} (\hat{X}_F) = \text{Var} (\bar{X}) + \text{Var} (u_F \sigma_X) = \text{Var} (\bar{X}) + u_F^2 \text{Var} (\sigma_X) = \frac{\sigma^2}{n} + u_F^2 \frac{\sigma^2}{2n}$$

$$\text{Var} (\hat{X}_F) = \frac{\sigma^2}{2n} + (u_F^2 + 2)$$

$$\sigma_{X_F} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \sqrt{u_F^2 + 2}$$

VIII.5.1.4 - Intervalles de confiance

On appelle intervalle de confiance à α % sur l'estimation p^{\wedge} d'un paramètre p , l'intervalle limité par deux bornes p_1 et p_2 telles que l'on ait α 2% de chance d'avoir $p < p_1$ ou $p > p_2$ du seul fait des erreurs d'échantillonnage.

On a donc α % de chance pour que la véritable valeur p (du paramètre que l'on estime par p^{\wedge}) soit comprise entre p_1 et p_2 . Compte tenu des réflexions sur les distributions des estimations, on obtient :

Intervalle de confiance à α % sur la moyenne :

Les bornes de l'intervalle sont : $\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- si $n < 30$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est la valeur du t de Student de fréquence au non-dépassement

$$F = 1 - \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{pour } v = n - 1 ;$$

- si $n > 30$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la variable réduite de Gauss de fréquence au non-dépassement

$$F = 1 - \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{pour } v = n - 1.$$

Intervalle de confiance à α % sur l'écart-type :

- si $n < 50$, les bornes de l'intervalle de confiance à α % sont :

$$\frac{n\sigma_x^2}{\chi_1^2} < V < \frac{n\sigma_x^2}{\chi_2^2}$$

χ_1^2 : valeur ayant pour fréquence au non-dépassement $F = \frac{1-\alpha}{2}$.

χ_2^2 : valeur ayant pour fréquence au non-dépassement $F = 1 - \frac{1-\alpha}{2}$.

- si $n > 50$, les bornes sont :

$$\sigma_x \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{2n}}$$

avec $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$: variable réduite de Gauss de fréquence au non-dépassement :

$$F = 1 - \frac{1 - \alpha}{2}$$

• Intervalle de confiance à α % sur le quantile x_F :

Les bornes de l'intervalle de confiance sont alors :

$$x_F \pm \frac{\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{t_F^2}{2}} \pm \frac{t_F t_\alpha^2}{2n}}{1 - \frac{t_\alpha^2}{2n}} \sigma$$

(2 fois plus pour la borne supérieure et 2 fois moins pour la borne inférieure)

t_F : variable réduite de Gauss ayant la fréquence au non-dépassement F

t_α : variable réduite de Gauss ayant la fréquence au non-dépassement $1 - \frac{1 - \alpha}{2}$.

VIII.5.1.5 - Comparaison de deux échantillons

Il arrive fréquemment que l'on ait à comparer deux séries de mesures. Par exemple, une série de débits sur une vingtaine d'années, donne des résultats différents. On se pose le problème de savoir si cette différence est attribuable au seul fait du hasard (erreur d'échantillonnage) ou, au contraire, si le milieu s'est modifié, ce qui a changé le comportement hydrologique du bassin.

En appliquant les résultats concernant les lois de distribution des paramètres ajustés, on obtient les résultats suivants.

Supposons que l'on tire une population normalement distribuée de moyenne m et d'écart-type σ , deux échantillons de taille n_1 et n_2 à partir desquels on estime les moyennes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 et les écarts-types σ_1 et σ_2 .

a) Comparaison des moyennes :

- si n_1 et $n_2 > 50$:

La différence $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

et distribuée selon une loi de Gauss de moyenne \bar{d} nulle et d'écart-type σ_d :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sigma_{x1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{x2}^2}{n_2}}$$

Par conséquent, si on trouve $|d| > uF \sigma_d$, il n'y a qu'une probabilité $p = 2(1 - F)$ pour que cette différence d ne soit due qu'au hasard. [$|d| > 2 \sigma_d \Rightarrow$ moins de 5 % de chance que ce soit dû au hasard, donc au seuil de 5 %, on peut dire que cela n'est pas dû au hasard, donc l'hypothèse du tirage dans une même population est à rejeter ; les deux moyennes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont significativement différentes au seuil de 5 %].

- Si n_1 et $n_2 < 50$:

On peut estimer à partir des deux échantillons, la variance $\hat{\sigma}^2$ de la population-mère par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)s^2_{x_1} + (n_2 - 1)s^2_{x_2}}{n_1 + n_2 - 2}$$

La variable $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ suit une loi de Student à : $v = n_1 + n_2 - 2$ degré de liberté.

On reprend alors le même raisonnement qu'au paragraphe précédent.

- Si on conclut que les deux échantillons sont tirés d'une même population-mère, on estimera la moyenne m par : $\hat{m} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

b) Comparaison des écarts-types :

- Si n_1 et $n_2 > 50$:

On estime que la différence d des variances ($d = \sigma^2_{x_1} - \sigma^2_{x_2}$) est distribuée selon une loi de Gauss de moyenne $\bar{d} = 0$ et d'écart-type σ_d :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{2 \sigma^4_{x_1}}{n_1} + \frac{2 \sigma^4_{x_2}}{n_2}}$$

Par conséquent, si on constate que $|\sigma^2_{x_1} - \sigma^2_{x_2}| > 2 \sigma_d$; on dira qu'il y a moins de 5 % de chance pour qu'un tel écart soit dû uniquement au hasard, et par conséquent, les deux variances sont significativement différentes au seuil de 5 %.

Si les deux échantillons ne sont pas significativement différents, on estimera la variance $\hat{\sigma}^2$ de la population mère par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 \sigma^2_{x_1} + n_2 \sigma^2_{x_2}}{n_1 + n_2}$$

- Si n_1 et $n_2 < 50$:

La variable $F = \frac{\sigma_{x1}^2}{\sigma_{x2}^2}$ (si $\sigma_{x1}^2 > \sigma_{x2}^2$) est distribuée selon une loi de Fischer-Snedecor de $v_1 = n_1 - 1$ et $v_2 = n_2 - 1$ degrés de liberté.

En comparant comme précédemment la valeur réelle de F à celle correspondant à une certaine fréquence, on déterminera si les variances sont significativement différentes et à quel seuil.

La variance de la population σ^2 pourra être estimée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1) \sigma_{x1}^2 + (n_2 - 1) \sigma_{x2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

VIII.5.2. - Loi de Galton (ou log-normale ou de Gibrat-Gauss)

VIII.5.2.1 - Fonction de répartition

Parmi les nombreuses formulations possibles, nous retiendrons la suivante, qui fait le mieux le parallèle avec la loi de Gauss :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$u = a \log(x - x_0) + b$$

Intervalle de définition : $x \in] x_0, + \infty[$

On remarque que l'on passe de la loi de Gauss à la loi de Galton en faisant le changement de variable de x en $\log(x - x_0)$. Cette loi fait intervenir trois paramètres dont x_0 est le paramètre de position.

Une autre formulation qui fait mieux ressentir le rôle des paramètres est:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{u} e^{-\frac{\ln^2(u)}{2\sigma^2}} du$$

$$u = \frac{x - x_0}{s}$$

x_0 : paramètre de position (identique au précédent)

s : paramètre d'échelle positif différent de zéro

σ : paramètre de forme positif différent de zéro

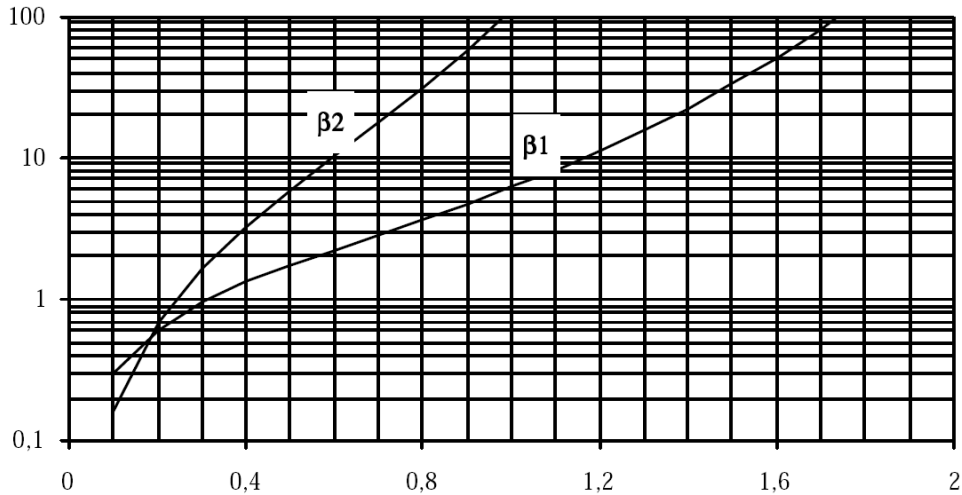


Fig .58 : Variations de β_1 et β_2 avec σ .

Le coefficient d'aplatissement β_2 est toujours positif ; la loi de Galton est plus "pointue" que la loi de Gauss.

Le coefficient d'asymétrie β_1 est toujours positif ; la loi de Galton est dissymétrique, étendue vers la droite.

Ces deux coefficients ne dépendent que de σ comme le montre la figure ci-contre.

La fonction de densité est alors :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{(\text{Ln } u)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Elle s'annule pour : $u = \frac{x-x_0}{s} e^{-\sigma^2}$ ce qui correspond au mode. Par ailleurs, la fonction de densité a deux points d'inflexion pour :

$$u = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma^2}})}$$

VIII.5.2.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments

En utilisant la première formulation, les trois paramètres à déterminer sont x_0 , a et b. En posant :

\bar{x} : moyenne des x ,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{écart-type des } x,$$

$$\mu_3 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad \text{moment centré d'ordre 3}$$

... on obtient trois équations à trois inconnues :

$$\frac{\sigma^4}{\mu_3} = \frac{(\bar{x} - x_0)^3}{\sigma^2 + 3(\bar{x} - x_0)^2} \quad (1)$$

$$a = \frac{1,517}{\sqrt{\log\left[1 + \frac{s^2}{(\bar{x} - x_0)^2}\right]}} \quad (2)$$

$$b = \frac{1,1513}{a} - a \log(\bar{x} - x_0) \quad (3)$$

L'équation (1) ne dépend que de x_0 et des valeurs prises dans l'échantillon. Malheureusement, il n'est pas possible d'expliciter x_0 et on devra résoudre l'équation (1) par approximations successives. Connaissant x_0 , on résout l'équation (2) qui donne a ; puis connaissant a et x_0 l'équation (3) qui donne b .

La méthode des moments présente le double inconvénient de nécessiter un calcul itératif et de donner parfois des valeurs de x_0 supérieures à la plus petite des valeurs rencontrées dans l'échantillon.

b) Méthode du maximum de vraisemblance

On obtient trois équations à trois inconnues x_0 , a et b :

$$2.3026 \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_0} \right] \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log^2(x_i - x_0) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \log(x_i - x_0) \right)^2 \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \log(x_i - x_0) \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_0} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\log(x_i - x_0)}{x_i - x_0} \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{1}{\frac{1}{n} S \log^2(x - x_0) - \frac{1}{n^2} [S \log(x - x_0)]^2} \quad (2)$$

$$b = - \frac{a S \log(x - x_0)}{n} \quad (3)$$

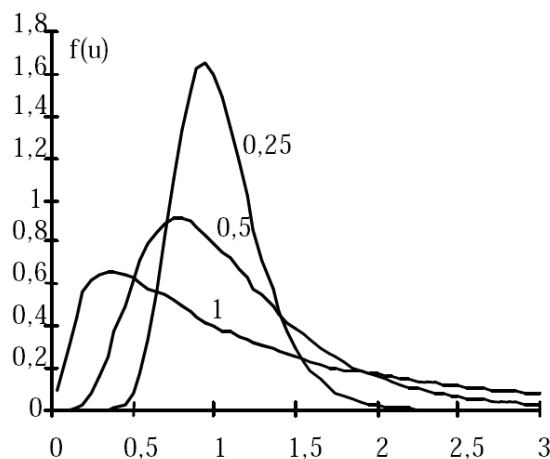


Fig .59 : La fonction de densité de la loi de Gauss

Comme dans la méthode des moments, l'équation (1) ne dépend que de x_0 mais on doit la résoudre par approximations successives. Connaissant x_0 , la formule (2) permet d'évaluer a ; enfin, avec x_0 et a , on détermine b par la formule (3). Cette méthode est préférable lorsque l'on dispose de moyens de calcul.

c) Méthode graphique

Ajustement graphique à une loi de Galton.

On passe de la loi de Gauss à la loi de Galton par le changement de variable x en $\log(x - x_0)$. Par conséquent, si on connaît x_0 , on pourra tracer l'équivalent de la droite de Henry en portant $\log(x_i - x_0)$ en fonction de $F = \frac{i - 0,5}{n}$

Sur un papier à probabilité graduée suivant les valeurs de la variable réduite de Gauss. Pour déterminer x_0 , on procédera par tâtonnements en se fixant différentes valeurs de x_0 jusqu'à obtenir l'alignement des points expérimentaux comme le montre la figure ci-dessous.

Pour déterminer a et b , on prendra deux points, par exemple :

$$u = 0 \Rightarrow a \log(x - x_0) + b = 0$$

$$u = -2 \Rightarrow a \log(x - x_0) + b = -2$$

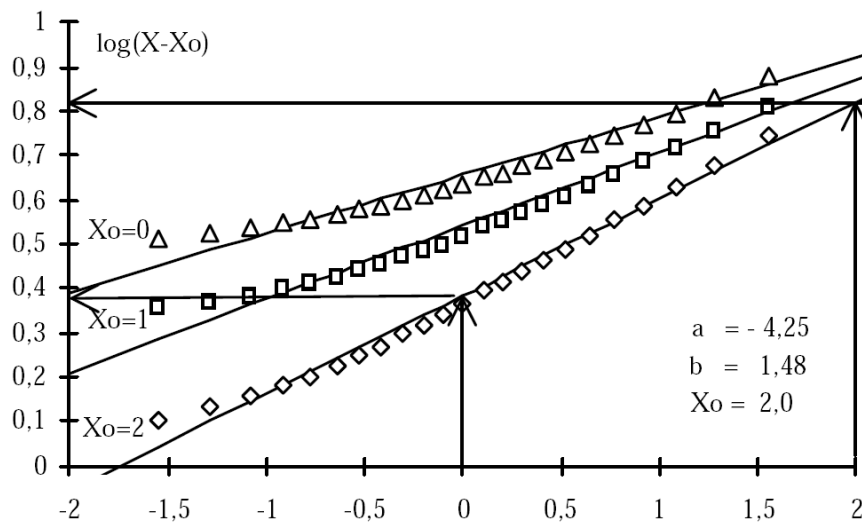


Fig. 60 : Variable réduite de Gauss

VIII.5.2.3 - Intervalles de confiance

L'étude théorique de la distribution des erreurs sur l'estimation des trois paramètres n'a pas donné de résultats facilement exploitables.

La seule méthode utilisable pour déterminer un intervalle de confiance sur un quantile x_P est de faire une simulation.

On suppose que les trois paramètres calculés sont exacts et on tire au hasard dans la population-mère ainsi définie m échantillons de taille n . On obtient ainsi m estimations du quantile x_P . On admet, après avoir rangé ces m valeurs, que celles de rang $i = 10$ et de rang $m - 9$ représentent, avec une bonne approximation, les bornes de l'intervalle de confiance à $\frac{m-19}{m}$.

Nombre de tirages à effectuer	38	76	190	1900
Intervalle de confiance à	50 %	75 %	90 %	99 %

Exemple :

Soit une série de 30 valeurs de débits qui ont permis de déterminer x_0 , a et b . Pour obtenir l'intervalle de confiance à 75 % sur le débit de fréquence 0,9, on procédera au tirage au hasard de 76 échantillons de taille 30 dans une population-mère (x_0 , a , b). Parmi les 76 estimations de

Q0,9, la 10^{ème} et la 67^{ème} représentent les bornes de l'intervalle de confiance à 75 % sur le quantile Q0,9.

VIII.5.2.4 - Cas particulier fréquent et simple où x_0 n'est plus un paramètre à ajuster

Bien souvent, on peut se fixer *a priori*, la valeur de x_0 qui est une borne de l'intervalle de variation de x . Dans ce cas, on peut se ramener à la loi de Gauss en procédant au changement de variable : $X = \log (x - x_0)$.

La fonction de distribution est alors définie d'après les deux seuls paramètres à estimer par les relations suivantes :

$$X = \overline{\log (x - x_0)} = \frac{\sum \log (x - x_0)}{n}$$

$$\sigma X = \sigma_{\log (x - x_0)} = \sqrt{\frac{\sum \log (x - x_0)^2 - n \overline{\log (x - x_0)}^2}{n - 1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{avec} \quad u = \frac{\log (x - x_0) - \overline{\log (x - x_0)}}{\sigma_{\log (x - x_0)}}$$

Tout ce qui a été dit sur la variable x distribuée selon une loi de Gauss devient valable pour la variable $\log (x-x_0)$.

En particulier, ceci permet une évaluation rapide des intervalles de confiance et évite l'utilisation d'un calculateur.

La simplification théorique due au choix arbitraire de x_0 explique que ce procédé soit le plus souvent adopté.

VIII.5.3. - Loi de Gumbel

Sous sa forme simple et généralement utilisée on a :

$$F(x) = e^{-e^{-u}}$$

$$\text{avec} \quad u = \frac{x - x_0}{s}$$

Le terme u est la variable réduite de Gumbel. L'intervalle de variation de x est donc : $x \in] - \infty , + \infty [$

- x_0 est le paramètre de position (mode)
- s est le paramètre d'échelle différent de zéro et positif.

Le coefficient d'asymétrie β_1 est constant et égal à 1,139 ; ce qui correspond à une dissymétrie étendue vers la droite.

Le coefficient d'aplatissement β_2 est constant et égal à 2,4 ; la loi de Gumbel est donc plus pointue que la loi de Gauss.

La densité de probabilité a pour expression :

$$f(u) = e^{-u} e^{-e^{-u}}$$

Elle a un maximum pour $u = 0$ et deux points d'inflexion pour $u = \text{Ln} \left[\frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) \right]$.

On peut noter dès à présent le comportement asymptotique de la distribution de Gumbel : si F tend vers 1, en posant $T = \frac{1}{1-F}$, la variable réduite de Gumbel u tend vers $\text{Ln } T$.

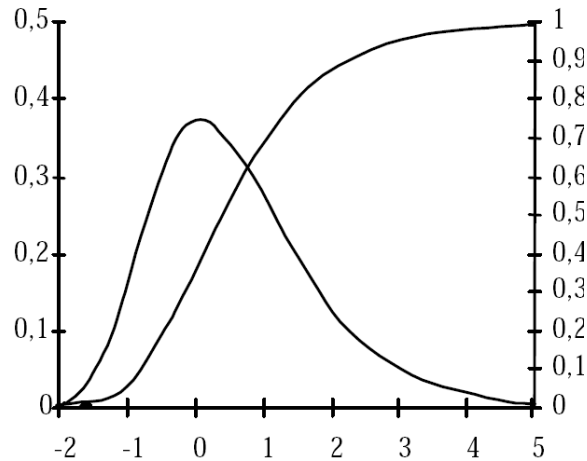


Fig.61 : Fonction de densité pour la loi de Gumbel

VIII.5.3.2 - Estimation des paramètres

a) Méthode des moments

La méthode des moments conduit à des estimations de calcul particulièrement simple et d'emploi très fréquent

$$s = 0,78 \sigma_X$$

$$x_0 = \bar{x} - 0,577 s$$

$$\left[\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{et} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} \right]$$

b) Méthode du maximum de vraisemblance

On aboutit au système résolutif suivant :

$$s + \frac{\sum x e^{-x/s}}{\sum e^{-x/s}} = \bar{x}$$

$$x_0 = -s \text{Ln} \left[\frac{\sum e^{-x/s}}{n} \right]$$

La première équation est implicite en s ; elle ne peut donc se résoudre que par itération. Ayant déterminé s , la deuxième équation permet la détermination de x_0 .

La méthode du maximum de vraisemblance ne s'utilise que lorsque l'on dispose de moyens de calcul automatique.

c) Méthode graphique

Cette loi à deux paramètres se prête très facilement à des ajustements graphiques. La variable réduite de Gumbel $u = \frac{x - x_0}{s}$ s'exprime très facilement en fonction de la fréquence puisque l'on a $F(x) = e^{-e^{-u}}$ d'où $u = -L n \left[L n \frac{1}{F} \right]$

Ainsi, en portant arithmétiquement les valeurs de x en fonction de leur fréquence expérimentale au nondépassement selon un axe gradué arithmétiquement en u, on doit obtenir une droite passant par exemple :

par $u = 0$ pour $x = x_0$

et $u = \pm 1$ pour $x = x_0 \pm s$

d'où la détermination immédiate de x_0 et s.

s représente la pente de cette droite ; aussi appelle-t-on souvent s le "gradex" (gradient exponentiel).

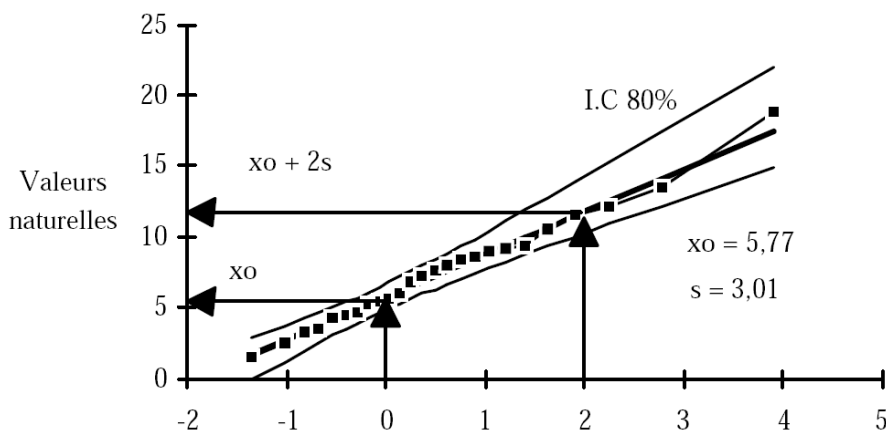


Fig.62 : Variable réduite de Gumbel

VIII.5.3.3 - Intervalle de confiance

BERNIER et VERON ont étudié les intervalles de confiance de la loi de Gumbel. L'intervalle de confiance à $\alpha\%$ sur un quantile x_F s'exprime en fonction de l'écart-type σ_x par :

$$\hat{x}_F - h_1 \sigma_x \leq x_F < \hat{x}_F + h_2 \sigma_x$$

où h_1 et h_2 sont des paramètres dépendant de la taille n de l'échantillon de la fréquence F et de la valeur de α .

• h_1 et h_2 seront évalués par la formule suivante (avec le signe + pour h_2 et le signe - pour h_1) :

$$h_{1,2} = \frac{\frac{t\alpha}{n} \sqrt{1 + 1,13 t_F + 1,1 t_F^2} \pm \frac{t^2\alpha}{n} (1,1 t_F + 0,57)}{1 - 1,1 \frac{t^2\alpha}{n}}$$

- $t\alpha$ est la variable réduite de Gauss correspondant à la fréquence au non-dépassement

$$1 - \frac{1 - \alpha}{2}$$

- t_F est la variable réduite de Gumbel correspondant à la fréquence au non-dépassement F , ramenée à sa moyenne et à son écart-type :

$$t_F = \frac{-\text{Ln}(-\text{Ln } F) - 0,577}{1,28}$$

k est donc remplacé par $-k$

VIII.6. - ASSOCIATION ENTRE VARIABLES

VIII.6.1. - Notion de corrélation

Soit deux phénomènes sur les quels on a pu faire une série de mesures X et Y . On dispose alors de n couples (x_i, y_i) . Ces points peuvent être représentés dans un graphique gradué en x et en y . Sur le schéma précédent, nous avons porté également les lois de distribution marginales de X et de Y (distribution de l'ensemble des X quel que soit Y et réciproquement).

Par ailleurs, pour un intervalle sur X limité par les bornes x et $x + dx$, on peut définir la loi de distribution conditionnelle des valeurs de Y liées par x , de même pour les distributions conditionnelles des X liées par y . Trois cas peuvent se présenter :

- les valeurs de Y lié à x sont toutes les mêmes ; on dit alors qu'il y a liaison fonctionnelle entre X et Y ;
- la distribution conditionnelle des Y liés par x est identique à la distribution marginale des Y (et ceci pour tout x) ; on dit alors qu'il y a indépendance entre X et Y ;
- le troisième cas est celui où la distribution conditionnelle est différente de la distribution marginale : les moyennes conditionnelles des y liés par les x, y sont des fonctions de x , et les dispersions sont inférieures à la dispersion de la distribution marginale. On dit alors qu'il y a corrélation entre X et Y .

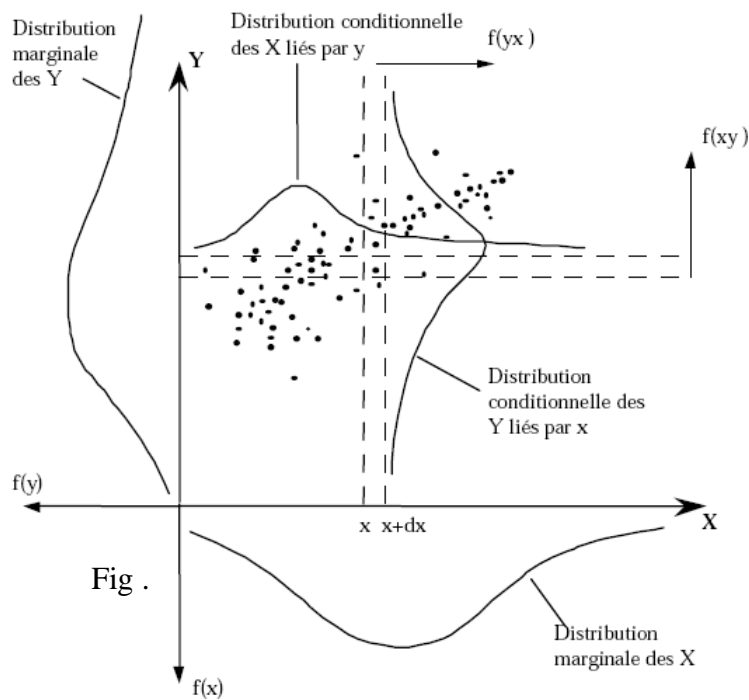


Fig.63 : Les lois de distribution

VIII.6.2. - Courbes et droites de régression

VIII.6.2.1 - Courbe de régression

Par définition, on appellera courbe de régression de y en x , le lieu des moyennes conditionnelles des y liés par x (de même pour la régression de x en y). Comme le suggère la figure ci-après, il n'y a pas de raison *a priori*, pour que la courbe de régression de y en x soit confondue avec celle de x en y , ni pour que ces courbes de régression aient une formulation prédéterminée

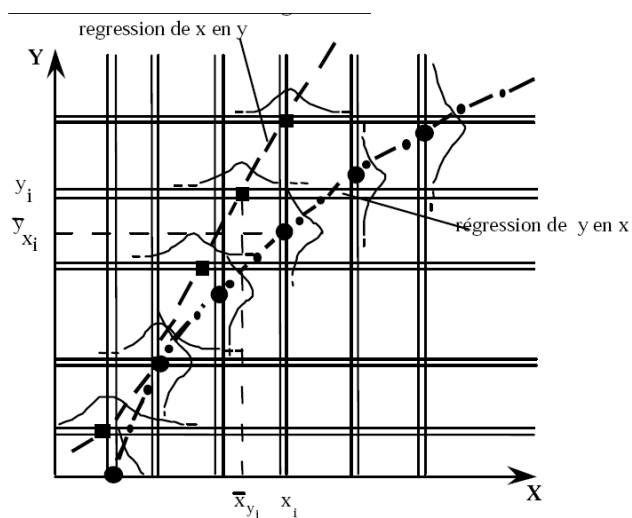


Fig. 64 : Courbe de régression de y en x

VIII.6.2. - Régression simple

VIII.6.3.1 - Choix du modèle linéaire - droite des moindres carrés

Soit deux séries d'observation X et Y telles qu'à chaque valeur x_i , on puisse associer une valeur de y_i . Les couples (x, y) peuvent être représentés dans un graphique comme ci-dessous.

Cependant, en l'absence d'hypothèse sur les distributions de X et de Y, il n'est pas possible de prévoir la forme des courbes de régression. Rien n'empêche cependant de chercher l'équation d'une droite $y = ax + b$ telle que la somme des carrés des écarts $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$, soit minimale. Les coefficients a et b que l'on cherche à déterminer seront obtenus en annulant les dérivées partielles de $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ par rapport à a et b :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{\partial a} = -2 \sum x_i \varepsilon_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\partial b} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{\partial b} = -2 \sum \varepsilon_i = 0$$

Soit le système suivant qui s'interprète ainsi :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 0 : \text{les écarts sont nuls en moyenne}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = 0 : \text{il y a orthogonalité entre } \varepsilon \text{ et } x \text{ (les écarts sont indépendants de } x)$$

Le système à résoudre en a et b est le suivant :

$$\begin{cases} \sum y_i - a \sum x_i - nb = 0 \\ \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \end{cases}$$

Tout calcul fait et en posant...

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \sigma_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{(n-1) \sigma_x \sigma_y}$$

... on trouve :

$$a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad b = \bar{y} - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x}$$

Par la même occasion, on peut calculer l'écart-type des e et là encore, on trouve une formule qui rappelle quelque chose :

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}} = \sigma_y \sqrt{1-r^2}$$

On ne manquera pas de remarquer que la droite des moindres carrés n'est autre que la droite de régression si X et Y sont tirés d'une loi de Gauss à deux dimensions.

Dès à présent, il faut se méfier d'une interprétation abusive de cette analogie : si le coefficient r calculé est mauvais (voisin de 0), il faut conclure que la régression n'est pas linéaire ; il peut y avoir pourtant une bonne corrélation, comme le suggère la figure ci-contre.

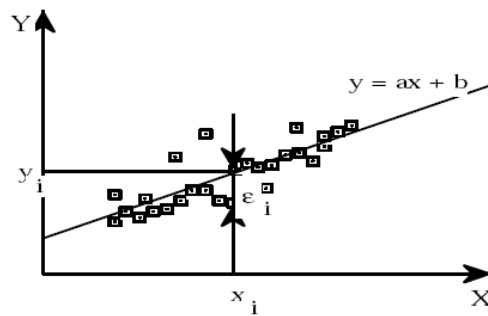


Fig. 65 : Droite de régression simple

VIII.6.2.2 - Précautions à prendre

Pour utiliser les résultats d'une régression linéaire, on effectuera certaines vérifications préalables :

- vérifier l'hypothèse de la distribution de Gauss à deux dimensions ou tout au moins que les distributions marginales sont normales (si ce n'est pas le cas, on opérera un changement de variable de façon à rendre les distributions gaussiennes) ;
- si cela n'est pas le cas, vérifier sur le graphique que le coefficient de corrélation n'est pas voisin de 1 par suite d'une erreur (par exemple, un couple (x,y) a été multiplié par 10) ;
- vérifier également sur le graphique que l'hypothèse d'homoscédasticité est acceptable
- vérifier que si r n'est pas significatif, la régression ne soit pas courbe. Si c'est le cas, on opérera un changement de variable (une anamorphose) sur x , ou y , ou les deux.

VIII.6.2.3 - Utilisation pratique de la régression simple

Une des utilisations les plus fréquentes est l'extension de séries de données. Soit deux variables X et Y ; X a été observée n fois et Y k fois. Soit k le nombre de couples (x,y) dont on dispose ; on se propose d'établir, à partir de ces k couples, la courbe de régression de y en x , puis à partir des valeurs de x , de reconstituer les $(n - k)$ valeurs de y non observées.

Soit \bar{x}_k , \bar{y}_k , $k\sigma_x$ et $k\sigma_y$ les moyennes et écarts-types déterminés d'après les k couples ainsi que le coefficient de corrélation r_k correspondant. La régression de y en x s'écrit :

$$\bar{y}_{x_j} = r_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_j - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$

\bar{y}_{x_j} représentant évidemment la moyenne conditionnelle des y liés par x_j et si les hypothèses de normalité sont admissibles, \bar{y}_{x_j} est la valeur la plus proche de y pour x_j donné.

Ainsi seront restituées les $(n - k)$ valeurs de y manquantes.

Ces estimations \bar{y}_x sont les valeurs "les plus probables" de Y pour les observés, et il n'est pas possible de mieux évaluer \bar{y}_x à partir de la seule connaissance de x. L'estimation de la moyenne des y sur l'échantillon étendu peut s'obtenir directement à partir de \bar{x}_k :

$$\text{moy}(\bar{y}_k) = \rho_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_n - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$

Si au lieu de chercher pour chaque x le y le plus probable, on cherche au contraire à reconstituer un échantillon global de y le plus probable, cette méthode n'est plus adaptée.

En effet, comme l'indique la figure ci-contre, l'extension des données par régression linéaire simple donne (n - k) \bar{y}_x qui sont évidemment disposés sur la droite de régression. Or, si on avait réellement observé les y, les points auraient certainement été dispersés autour de cette droite. On peut même évaluer cette dispersion par :

$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\sigma_y^2 (1 - \rho^2)}$. Dans le cas de petits échantillons, il est préférable d'utiliser sans biais

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \sigma_\varepsilon.$$

La régression linéaire simple conduit donc à une sous-estimation de la variance de l'échantillon étendu.

Pour tenir compte de cette remarque, on peut procéder de la façon sommaire suivante. On estime l'écart-type de l'échantillon étendu $n\hat{\sigma}_y$ par la formule :

$$n\hat{\sigma}_y^2 = k\sigma_y^2 + \rho^2 k \frac{k\sigma_y^2}{k\sigma_x^2} [n\sigma_x^2 - k\sigma_x^2]$$

On compare cette valeur $n\hat{\sigma}_y$ à $k\hat{\sigma}_y$ et on retient la plus forte de ces deux valeurs.

Une deuxième façon de procéder consiste à générer d'une façon aléatoire des écarts à la droite de régression : si on admet les résultats acquis pour une loi de Gauss à deux dimensions, la moyenne conditionnelle des y liés par x est :

$$\bar{y}_{x_j} = \rho_k \frac{k\sigma_y}{k\sigma_x} (x_j - \bar{x}_k) + \bar{y}_k$$

L'écart ε_j entre la véritable valeur y_j et son estimation \bar{y}_{x_j} est :

$$\varepsilon_j = y_j - \bar{y}_{x_j}$$

ε_j est distribué selon une loi de Gauss de moyenne nulle et d'écart-type :

$$\sigma_\varepsilon = k\sigma_y \sqrt{1 - r^2} \text{ (où } \hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \sigma_\varepsilon \text{)}$$

VIII.6.3. - Régression double

Comme pour la régression simple, on pourrait mettre en parallèle une représentation probabiliste et une représentation "méthode des moindres carrés".

Afin de simplifier le texte, nous ne présenterons que la deuxième, tout en admettant une partie des résultats qu'établirait la première.

VIII.6. 3.1 - Equation de la régression double linéaire

Soit une variable z que l'on désire expliquer à partir de deux variables x et y . On se propose de trouver une relation linéaire de la forme :

$$z = ax + by + c + \varepsilon$$

Les paramètres a , b et c étant déterminés de façon à minimiser la somme des carrés des écarts ε : $\varepsilon_i^2 = (z_i - ax_i - by_i - c)^2$

Ecrire que $\sum \varepsilon_i^2$ est minimum revient à écrire que les dérivées partielles de $\sum \varepsilon_i^2$ par rapport à a , b et c que l'on veut déterminer sont nulles :

$$\sum \varepsilon_i^2 \text{ minimum équivaut à : } \begin{cases} \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Ce système de trois équations à trois inconnues se transforme ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial a} = 2 \sum x_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum x_i \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial b} = 2 \sum y_i (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum y_i \varepsilon_i = 0 \\ \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial c} = 2 \sum (z_i - ax_i - by_i - c) = 2 \sum \varepsilon_i = 0 \end{cases}$$

On remarque comme pour la régression simple, que la méthode des moindres carrés donne pour solution des paramètres a , b et c tels que les erreurs soient indépendantes de x et de y (orthogonalité établie par les deux premières équations) et nulles en moyenne (troisième équation).

La résolution de ce système de trois équations à trois inconnues ne présente pas de difficultés. Les paramètres a , b et c peuvent s'exprimer en fonction des moyennes, écarts-types et coefficients de corrélation de x , y et z

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} ; \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} ; \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n - 1}}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z}{n} ; \sigma_z = \sqrt{\frac{\sum (z - \bar{z})^2}{n - 1}}$$

$$\rho = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n - 1) \sigma_x \sigma_y}$$

$$r_1 = \frac{\sum (z - \bar{z})(x - \bar{x})}{(n - 1) \sigma_z \sigma_x}$$

$$r_2 = \frac{\sum (z - \bar{z})(y - \bar{y})}{(n - 1) \sigma_z \sigma_y}$$

Ces trois coefficients de corrélation seront appelés par la suite coefficients de corrélation totale entre x et y, z et x, et z et y.

On a alors, tout calcul fait :

$$a = \frac{r_1 - r_2 \rho}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$$

$$b = \frac{r_2 - r_1 \rho}{1 - \rho^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y}$$

Références bibliographiques

- Bravard, J.P., Petit F (1997).** Les cours d'eau, *Armand Colin*.
- Chow V. T (1988).**, Applied Hydrology, Civil Engineering Series, *McGraw-Hill International Edition*.
- Cosandey C., Robinson M (2000).**, Hydrologie continentale, *Armand Collin, Paris*.
- De Marsily G (1995).**, L'eau, *Collection DOMINOS / Flammarion*.
- Fetter C.W (1993).**, Applied hydrogeology. *Prentice Hall*.
- Gleick, P.H. (Editor) (1993).** Water in Crisis. A guide to the World's Fresh Water Resources. *Oxford University Press*.
- Hillel D (1974).**, L'eau et le sol -Principes et processus physiques, *Vander-éditeur, Louvain*.
- Jacques, G (1996).**, Le cycle de l'eau. Les fondamentaux. *Hachette*.
- J.P. LABORDE (2009).** Eléments de l'Hydrologie de surface, l'Université de Nice - Sophia Antipolis, 192pp.
- Kirby M.J (1978).**, Hillslope Hydrology, *John Wiley & Sons*.
- Maidment, D. R (1993).**, Handbook of Hydrology, *McGraw-Hill International Edition*.
- Meylan P., Musy A (1999).**, Hydrologie Fréquentielle, *Edition HGA Bucarest*.
- Morgenthaler S (1997).**, Introduction à la statistique, *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*.
- Musy A., Higy, C (1998).**, Hydrologie Appliquée, *Edition HGA Bucarest*,
- Musy A., Soutter M (1991).**, Physique du sol, *Presses Polytechniques Universitaires Romandes, Lausanne*.
- Réménérias G (1976).**, Hydrologie de l'ingénieur, *Ed.Eyrolles, Paris*.
- Roche M (1963).**, Hydrologie de surface, *Gauthier - Villars Editeur, Paris*.
- Singh V.P (1995)** ., Computer models of watershed hydrology. *Water Resources Publications, 1129 pp*.
- Viesman, W., Knapp, J., Lewis, G., Harbaugh, T (1972).**, Introduction to Hydrology, *Harper and Row, New York*.
- Ward R.C., Robinson M (1990).**, Principles of Hydrology, *Mc Graw-Hill, London*.