
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Tindouf



Faculté des sciences et de la technologie
Département ST (2 année GP)

Mathématique 3
Cours et exercices corrigés

Année universitaire 2025-2026
AZZI AHMED

Tableau des matières

1	Intégrales Multiples	1
1.1	Révision sur l'intégrale de Riemann	1
1.1.1	Conditions d'intégrabilité	2
1.1.2	Propriétés élémentaires	2
1.1.3	Théorème fondamental	2
1.1.4	Fonctions Primitives	4
1.1.5	Fonctions primitives et intégrale de Riemann	5
1.1.6	Méthodes de calcul	5
1.2	Intégrales Multiples	8
1.2.1	Intégrales doubles	8
1.2.2	Calcul d'une intégrale double	8
1.2.3	Changement de variables d'une intégrale double	10
1.2.4	Intégrales triples	10
1.2.5	Calcul d'une intégrale triple	11
1.2.6	Changement de variables d'une intégrale triple	12
1.2.7	Intégrales multiples généralisées	12
1.3	Applications géométriques	13
1.4	Applications physiques	15
1.5	Techniques de calcul	16
1.6	Exercices Corrigés	16
2	Intégrales Impropres (Généralisées)	26
2.1	Définitions fondamentales	26
2.2	Intégrales impropres de première espèce	27
2.3	Intégrales impropres de deuxième espèce	27
2.4	Intégrales impropres mixtes	28
2.5	Critères de convergence	29
2.5.1	Critères de comparaison	29
2.5.2	Critère des équivalents	29
2.5.3	Critère d'Abel et Dirichlet	29
2.5.4	Intégrale de Bertrand	29
2.5.5	Convergence absolue et semi-convergence	29
2.5.6	Convergence uniforme	30
2.6	Techniques de calcul	30
2.7	Exercices corrigés	30
3	Équations Différentielles	40
3.1	Rappel sur les équations différentielles ordinaires	40
3.1.1	Définitions fondamentales	40
3.1.2	Problème de Cauchy (valeur initiale)	40
3.2	Méthodes de résolution analytique	40
3.2.1	Équations du premier ordre	40
3.2.2	Équations linéaires du second ordre	42
3.3	Systèmes linéaires	43
3.4	Équations aux Dérivées Partielles	44
3.4.1	Définitions fondamentales	44
3.4.2	Classification des EDP linéaires du second ordre	45
3.4.3	Méthodes de résolution analytiques	45
3.4.4	Équations classiques de la physique mathématique	48
3.5	Fonctions Spéciales	48

3.5.1	Fonction Gamma d'Euler	48
3.5.2	Fonction Beta	49
3.5.3	Fonctions de Bessel	50
3.6	Exercices corrigées	51
4	Séries, Séries de Fourier	69
4.1	Séries numériques, Suites et séries de fonctions, Séries entières	69
4.2	Séries numériques	69
4.3	Suites et séries de fonctions	71
4.3.1	Suites de fonctions	71
4.3.2	Séries de fonctions	71
4.4	Séries entières	72
4.4.1	Définitions et rayon de convergence	72
4.4.2	Propriétés des séries entières	73
4.4.3	Développements en série entière	73
4.5	Séries de Fourier	75
4.5.1	Définitions fondamentales	75
4.5.2	Propriétés des coefficients de Fourier	77
4.5.3	Formule de Parseval	77
4.5.4	Théorèmes de convergence	78
4.5.5	Opérations sur les séries de Fourier	79
4.5.6	Exemples fondamentaux	81
4.5.7	Table des séries de Fourier usuelles	81
4.6	Exercices corrigées	81
5	Transformée de Fourier	98
5.1	Transformée de Fourier	98
5.1.1	Définitions et notations	98
5.1.2	Transformée inverse	99
5.1.3	Conditions d'existence	99
5.1.4	Propriétés fondamentales	99
5.1.5	Transformées de Fourier usuelles	100
5.1.6	Théorèmes fondamentaux	100
5.2	Extensions et généralisations	101
5.3	Applications	101
5.4	Relations entre La transformée de Laplace et la transformée de Fourie	103
5.5	Exercices corrigés	103
6	Transformée de Laplace	114
6.1	Définition et conditions d'existence	114
6.2	Propriétés fondamentales	117
6.3	Transformée inverse	118
6.4	Applications	119
6.5	Relations avec autres transformées	121
6.6	Exercices corrigés	121

Notations

\mathbb{N} l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des nombres naturels.
 \mathbb{Z} l'ensemble des nombres relatifs.

\mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

\mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

$\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F

$\mathcal{C}^0(\mathbb{I})$ L'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{I} .

$\mathcal{C}^1(\mathbb{I})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{I} dont la dérivée est continue.

$L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction intégrable sur \mathbb{R} .

$L^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction de carré intégrable sur \mathbb{R}

Avant-propos

Ce polycopie est une ressource sur les principaux concepts mathématiques 3, axée sur plusieurs sujets fondamentaux en analyse mathématique et en théorie des équations différentielles.

Ce polycopie est destiné aux étudiants de la deuxième année génie de procédé (GP). C'est, également une référence précieuse pour les étudiants en deuxième année des classes de science et technologie (ST) , et à tous ceux qui veulent se familiariser avec les méthodes mathématiques de bases en analyse mathématique et en théorie des équations différentielles.

Je me suis efforcé de rédiger les chapitres de cet polycopie de manière facile en me concentrant sur les thèmes importants des programmes.

En premier lieu, j'ai voulu que ce polycopie soit directement utilisable par un étudiant de deuxième année universitaire GP.

L'auteur espère que le présent document, malgré ses imperfections, pourra rendre service aux étudiants et aux lecteurs. C'est pour ce but qu'il a été écrit et publié.

Dr : Ahmed Azzi
Université de Tindouf
Mars 2026

Programme détaillé de module : Mathématiques-3

UE : UEF 2.1.1

Matière 1 : Mathématiques-3

Objectifs de l'enseignement : À la fin de ce cours, l'étudiant(e) devrait être en mesure de connaître les différents types de séries et ses conditions de convergence ainsi que les différents types de convergence. Connaissances préalables recommandées Mathématiques 1 et Mathématiques 2 Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.

1.2 Intégrales doubles et triples.

1.3 Application au calcul d'aires, de volumes...

Chapitre 2 : Intégrale impropres

2.1 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné.

2.2 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités.

Chapitre 3 : Équations différentielles

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires.

3.2 Équations aux dérivées partielles.

3.3 Fonctions spéciales.

Chapitre 4 : Séries

4.1 Séries numériques.

4.2 Suites et séries de fonctions.

4.3 Séries entières.

4.4 Séries de Fourier.

Chapitre 5 : Transformation de Fourier

5.1 Définition et propriétés.

5.2 Application à la résolution d'équations différentielles.

Chapitre 6 : Transformation de Laplace

6.1 Définition et propriétés.

6.2 Application à la résolution d'équations différentielles.

Intégrales Multiples

1.1 Révision sur l'intégrale de Riemann

Les intégrales sont utilisées dans de multiples disciplines scientifiques notamment en physique pour des opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...). Le concept d'intégrale a été introduit au **XVII^e siècle** par **Leibniz** et **Newton**.

L'intégrale de Riemann, introduite par **Bernhard Riemann**, est une formalisation mathématique de la notion d'aire sous une courbe. Elle repose sur l'approximation de la fonction par des fonctions en escalier et la notion de sommes de Darboux.

Définitions fondamentales

Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On considère une subdivision $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Définition 1.1.1. Pour une subdivision Δ sur $[a, b]$, et en sélectionnant $\alpha_k \in [x_k, x_{k+1}]$, on définit la somme de Riemann associée à Δ et à un ensemble de points $\alpha = (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ comme suit :

$$\mathcal{R}(f, \Delta, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Définition 1.1.2 (Sommes de Darboux). On pose pour chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

La somme de Darboux inférieure et la somme de Darboux supérieure sont respectivement :

$$S_{\text{inf}}(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S_{\text{sup}}(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

On définit alors l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\Delta} S_{\text{inf}}(\Delta), \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_{\Delta} S_{\text{sup}}(\Delta).$$

Définition 1.1.3 (Fonction intégrable au sens de Riemann). *La fonction f est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si*

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Cette valeur commune est notée $\int_a^b f(x) dx$.

1.1.1 Conditions d'intégrabilité

Théorème 1.1.1 (Critère de Riemann). *Une fonction bornée f sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ telle que*

$$S_{sup}(\sigma) - S_{inf}(\sigma) < \varepsilon.$$

En particulier, toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable. Plus généralement, une fonction bornée ayant un ensemble dénombrable de points de discontinuité est intégrable.

1.1.2 Propriétés élémentaires

— **Linéarité :**

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

— **Positivité :** si $f \geq 0$ et intégrable, alors

$$\int_a^b f \geq 0.$$

— **Relation de Chasles :** pour $a < c < b$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

1.1.3 Théorème fondamental

Théorème 1.1.2. *Soit f intégrable sur $[a, b]$. On définit pour tout $x \in [a, b]$ la fonction*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors F est continue sur $[a, b]$. De plus, si f est continue en un point $x_0 \in [a, b]$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Réciproquement, si F est une primitive de f (c'est-à-dire $F' = f$) sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Exemple 1. *Calculons*

$$\int_0^1 x^2 dx$$

à l'aide des sommes de Riemann.

Solution : Soit la subdivision régulière $x_i = i/n$ pour $i = 0, \dots, n$. Choisissons les points d'évaluation à droite : $\xi_i = x_i$. La somme de Riemann est

$$R_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Donc $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Exemple 2. Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ en utilisant des sommes de Riemann avec des subdivisions régulières et des points d'évaluation à droite.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. La subdivision est régulière de pas $\frac{1}{n}$. On choisit les points d'évaluation $\xi_i = x_i$ (extrémités droites). La somme de Riemann associée est

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En simplifiant,

$$R_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Puisque f est continue, elle est intégrable et la limite des sommes de Riemann est l'intégrale. Ainsi,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Exemple 3. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ par la méthode des sommes de Riemann avec des subdivisions régulières et des points à gauche.

Solution : Soit n un entier. Posons $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ pour $i = 0, \dots, n$. Le pas est $\frac{1}{n}$. On prend $\xi_i = x_{i-1}$ (points à gauche). Alors

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Cette somme est une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $[1, 2]$. Sa limite quand $n \rightarrow \infty$ est $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$. On retrouve ainsi la valeur $\ln 2$.

Exemple 4. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ à l'aide d'une primitive.

Solution : Une primitive de $\cos x$ est $\sin x$. Par le théorème fondamental,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Exemple 5. Calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Solution : On remarque que $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \frac{\ln x}{x}$. Donc une primitive est $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. Ainsi,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(1^2 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 6 (Fonction en escalier). Soit f définie sur $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Montrer que f est intégrable et calculer son intégrale.

Solution : f est bornée et n'a qu'un point de discontinuité (en $x = 1$), donc elle est intégrable. L'intégrale vaut

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 2 dx = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3.$$

Exemple 7 (Fonction de Dirichlet). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Solution : Pour toute subdivision de $[0, 1]$, chaque intervalle contient à la fois des rationnels et des irrationnels. Donc sur chaque sous-intervalle, $\inf f = 0$ et $\sup f = 1$. Par conséquent, les sommes de Darboux inférieure et supérieure sont respectivement $S_{\inf} = 0$ et $S_{\sup} = 1$. Leur différence est toujours 1, donc l'intégrale supérieure vaut 1 et l'intégrale inférieure vaut 0. Elles ne coïncident pas, donc f n'est pas intégrable.

• Exemples géométriques

Exemple 8 (Aire entre deux courbes). Calculer l'aire de la région comprise entre les courbes

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = \sqrt{x} \quad \text{pour} \quad x \in [0, 1].$$

Solution :

On sait que l'aire entre deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ avec $f > g$ est donnée par

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \quad (u^2 \text{ unité carrée}).$$

Sur $[0, 1]$, on a $\sqrt{x} \geq x^2$. L'aire est donnée par

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \int_0^1 x^{1/2} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx.$$

On a

$$\int_0^1 x^{1/2} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$A = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad (u^2).$$

Exemple 9. [Valeur moyenne d'une fonction] Calculer la valeur moyenne de

$$f(x) = \sin x \quad \text{sur} \quad [0, \pi].$$

Solution : La valeur moyenne d'une fonction f est définie par

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Donc

$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{1}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{1}{\pi} (1 + 1) = \frac{2}{\pi}.$$

1.1.4 Fonctions Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1.4 (Primitive). On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Remarque 1.1.1. Si F est une primitive de f , alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $F + C$ est aussi une primitive de f .

Réciproquement, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

1.1.5 Fonctions primitives et intégrale de Riemann

Le théorème fondamental de l'analyse établit le lien entre primitives et intégrales.

Théorème 1.1.3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors la fonction F définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$. De plus, pour toute primitive G de f , on a

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Ainsi, la recherche d'une primitive permet de calculer des intégrales définies.

▷ Propriété

Linéarité : Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un même intervalle, alors : $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ (pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

1.1.6 Méthodes de calcul

Intégration par parties, changement de variable, décomposition en éléments simples, ...etc.

Théorème 1.1.4. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (c'est une conséquence du théorème fondamental).

Plus généralement, toute fonction intégrable au sens de Riemann admet des primitives, mais celles-ci ne sont pas nécessairement dérivables en tout point.

Exemple 10. Cherchons une primitive de

$$f(x) = \cos x \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Solution : On sait que

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$$

donc $\sin x$ est une primitive. L'ensemble des primitives est $\sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 11. Calculer une primitive de

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Solution : On utilise la linéarité et la formule $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pour $n \neq -1$. Ainsi,

$$\int (3x^2 + 2x - 5) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = x^3 + x^2 - 5x + C.$$

Donc les primitives sont $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 12. Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Solution : On a $f(x) = x^{-2}$. Pour $x > 0$,

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

Donc les primitives sont

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

Exemple 13. Calculer une primitive de $f(x) = \sin(2x)$ sur \mathbb{R} .

Solution : On utilise la formule

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$$

pour $a \neq 0$. Ici $a = 2$, donc

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + C.$$

Exemple 14 (Primitive par intégration par parties). Calculer une primitive de $f(x) = xe^x$ sur \mathbb{R} .

Solution : On pose $u = x$ et $dv = e^x dx$. Alors $du = dx$ et $v = e^x$. La formule d'intégration par parties $\int u dv = uv - \int v du$ donne

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Exemple 15 (Primitive par changement de variable). Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Solution : On pose $t = \ln x$, alors $dt = \frac{dx}{x}$. Ainsi,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Exemple 16. Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad \text{sur }]1, +\infty[.$$

Solution : On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right).$$

Alors,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{dx}{x + 1} \right) = \frac{1}{2} (\ln |x - 1| - \ln |x + 1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C.$$

Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc on peut omettre les valeurs absolues :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) + C.$$

Exemple 17 (Primitive avec fonction composée). Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{sur }]-1, 1[.$$

Solution : On reconnaît la dérivée de $\arcsin x$:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc une primitive est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Exemple 18. Calculer une primitive de $f(x) = \sin^2 x$ sur \mathbb{R} .

Solution : On utilise la formule

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Alors

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Exemple 19. Calculer une primitive de $f(x) = e^{2x+1}$ sur \mathbb{R} .

Solution : On a

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C,$$

pour $a \neq 0$. Ici $a = 2$, $b = 1$, donc

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C.$$

Exemple 20. Calculer une primitive de $f(x) = e^x \sin x$ sur \mathbb{R} .

Solution : On applique deux intégrations par parties. Posons

$$I = \int e^x \sin x dx.$$

Intégrons par parties avec $u = \sin x$, $dv = e^x dx$: $du = \cos x dx$, $v = e^x$. Alors

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Pour

$$J = \int e^x \cos x dx,$$

on intègre par parties avec $u = \cos x$, $dv = e^x dx$: $du = -\sin x dx$, $v = e^x$. Donc

$$J = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I.$$

En substituant,

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I.$$

D'où

$$2I = e^x (\sin x - \cos x),$$

et finalement

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

1.2 Intégrales Multiples

Les intégrales multiples sont un outil très efficace en mathématiques et en physique pour calculer des quantités géométriques et physiques en dimensions supérieures. La maîtrise des techniques de changement de variables et de choix de système de coordonnées approprié est essentielle pour résoudre efficacement les problèmes. Les applications vont du calcul de volumes à la mécanique des fluides, en passant par la théorie du potentiel et l'électromagnétisme.

Les intégrales multiples sont une généralisation des intégrales simples à plusieurs variables. Elles permettent de calculer des volumes, des masses, des centres de gravité, des moments d'inertie, etc., pour des domaines en deux ou trois dimensions, et même plus.

1.2.1 Intégrales doubles

Définition 1.2.1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine borné D . L'intégrale double de f sur D est notée :

$$\iint_D f(x, y) dA \quad \text{ou} \quad \iint_D f(x, y) dx dy$$

• Domaines élémentaires

- **Domaine de type I** : $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
- **Domaine de type II** : $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

1.2.2 Calcul d'une intégrale double

- Pour un domaine de **type I** :

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Pour un domaine de **type II** :

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

▷ Théorème de Fubini

Théorème 1.2.1. Pour une fonction continue f sur un domaine rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Exemple 21. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \int_2^3 (x^2 + y) dy dx$$

Solution : On a le domaine est donné comme

$$D_{(x, y)} = [0, 1] \times [2, 3]$$

La fonction f est continue sur le domaine D Donc

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[\int_2^3 (x^2 + y) dy \right] dx = \int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=2}^{y=3} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 [3 - 2] + \frac{1}{2} [9 - 4] \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{5}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{2} x \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{17}{6}.
 \end{aligned}$$

Et encore

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^3 \left[\int_0^1 (x^2 + y) dx \right] dy = \int_2^3 \left(\left[\frac{1}{3} x^3 + yx \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy \\
 &= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy \\
 &= \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{2} y^2 \right]_2^3 \\
 &= \frac{1}{3} [3 - 2] + \frac{1}{2} [9 - 4] = \frac{17}{6}
 \end{aligned}$$

Théorème 1.2.2. Pour une fonction continue f donnée par $f(x, y) = h(x)k(y)$ sur un domaine rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$:

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b h(x) dx \int_c^d k(y) dy.}$$

Exemple 22. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \int_2^3 e^{x+y} dy dx, \quad I_2 = \int_0^1 \int_2^3 x e^{x^2+y} dy dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sin(x) e^y dy dx.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \int_2^3 e^{x+y} dy dx = \int_0^1 e^x dx \int_2^3 e^y dy \\
 &= [e^x]_0^1 [e^y]_2^3 = e^2(e - 1)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 \int_2^3 x e^{x^2+y} dy dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx \int_2^3 e^y dy \\
 &= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 [e^y]_2^3 = \frac{1}{2} e^2(e - 1)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sin(x) e^y dy dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \int_0^1 e^y dy \\
 &= [\cos(x)]_0^{\pi/2} [e^y]_0^1 = e - 1
 \end{aligned}$$

1.2.3 Changement de variables d'une intégrale double

1- Formule générale

Soit $T : (u, v) \mapsto (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ un changement de variables de classe C^1 , bijectif. Alors :

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T(u, v)| du dv,}$$

où

$$J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ est le jacobien.}$$

2- Coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Le jacobien est :

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Donc :

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.}$$

Exemple 23. **Intégrale en coordonnées polaires**

Calculer

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dA \quad \text{où } D \text{ est le disque } x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Solution : En coordonnées polaires :

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dA = r dr d\theta, \quad \text{et } D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a \\ &= \pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

1.2.4 Intégrales triples

Définition 1.2.2. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un solide borné E . L'intégrale triple de f sur E est notée :

$$\iiint_E f(x, y, z) dV \quad \text{ou} \quad \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

• Domaines élémentaires

— **Domaine de type I :** $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$

— **Domaine de type II :** Projection sur le plan yz ou xz

1.2.5 Calcul d'une intégrale triple

— Pour un domaine de **type I** :

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

— Pour un domaine de **type II** : Projection sur le plan yz ou xz

Théorem 1.2.3. Pour une fonction continue f sur un domaine $[a, b] \times [c, d] \times [e, k]$:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^k f(x, y, z) dz dy dx = \int_c^d \int_a^b \int_e^k f(x, y) dz dx dy = \int_e^k \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy dz$$

Exemple 24. Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \int_2^3 \int_{-1}^2 (x + y + z) dz dy dx$$

Solution : On a le domaine est donné comme

$$D_{(x, y, z)} = [0, 1] \times [2, 3] \times [-1, 2]$$

La fonction f est continue sur le domaine D Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_2^3 \int_{-1}^2 (x + y + z) dz dy dx = \int_0^1 \int_2^3 \left[\int_{-1}^2 (x + y + z) dz \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_2^3 \left[(xz + yz + \frac{1}{2}z^2) \right]_{z=-1}^{z=2} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_2^3 \left[((2x + 2y + \frac{1}{2}2^2)) - (-x - y + \frac{1}{2}(-1)^2) \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_2^3 \left[3x + 3y + \frac{3}{2} \right] dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}y \right]_{y=2}^{y=3} dx \\ &= \int_0^1 (3x + 9) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 + 9x \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

Théorem 1.2.4. Pour une fonction continue f donnée par $f(x, y, z) = h(x)k(y)l(z)$ sur un domaine rectangulaire $[a, b] \times [c, d] \times [e, m]$:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b h(x) dx \int_c^d k(y) dy \int_e^m l(z) dz.$$

Exemple 25. Calculer l'intégrale suivante

$$I_1 = \int_0^1 \int_1^2 \int_0^\pi \frac{\sin(y)e^z}{x} dy dx dz$$

Solution : On a le domaine est donné comme

$$D_{(x, y, z)} = [1, 2] \times [0, \pi] \times [0, 1]$$

La fonction f est continue sur le domaine D Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \int_1^2 \int_0^\pi \frac{\sin(y)e^z}{x} dy dx dz, \\ &= \int_0^1 e^z dz \int_1^2 \frac{1}{x} dx \int_0^\pi \sin(y) dy, \\ &= [e^z]_0^1 [\ln(x)]_1^2 [-\cos(y)]_0^\pi \\ &= (e - 1)(\ln(2))(2) \\ &= 2(e - 1) \ln(2) \end{aligned}$$

1.2.6 Changement de variables d'une intégrale triple

▷ Coordonnées curvilignes

1- Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= z \\ dV &= r dr d\theta dz \end{aligned}$$

2-Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta, & y &= \rho \sin \phi \sin \theta, & z &= \rho \cos \phi \\ dV &= \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

3- Coordonnées généralisées

Pour un changement de variables $T : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$:

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_T(u, v, w)| du dv dw,}$$

où $J_T = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ est le déterminant jacobien.

1.2.7 Intégrales multiples généralisées

Comme pour les intégrales simples, on peut définir des intégrales multiples sur des domaines non bornés ou pour des fonctions non bornées, par passage à la limite.

Exemple 26. Intégrale de Gauss en 2D

Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Solution : En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

On en déduit l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1.3 Applications géométriques

Exemple 27. **Calcul d'une aire** Calculer l'aire du domaine D délimité par

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = 2x.$$

Solution :

1. Points d'intersection

$$\{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 2x\}$$

Alors : $x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

2. Pour $x \in [0, 2]$, on a $x^2 \leq y \leq 2x$

3.

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \iint_D 1 \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy \, dx \\ &= \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \, u^2 \end{aligned}$$

Exemple 28. **Calcul d'un volume**

Calculer le volume sous la surface

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad \text{et au-dessus du carré} \quad [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Solution :

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[4x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\left(4 - \frac{1}{3} - y^2 \right) - \left(-4 + \frac{1}{3} + y^2 \right) \right] dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(8 - \frac{2}{3} - 2y^2 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{22}{3} - 2y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{22}{3}y - \frac{2}{3}y^3 \right]_{-1}^1 = 2 \left(\frac{22}{3} - \frac{2}{3} \right) = 2 \times \frac{20}{3} = \frac{40}{3} \, (u^3) \end{aligned}$$

Exemple 29. **Volume d'une sphère**

Calculer le volume d'une sphère de rayon R : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Solution : Utilisons les coordonnées sphériques :

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

avec $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Le jacobien est $\rho^2 \sin \phi$. Donc :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \cdot \int_0^R \rho^2 \, d\rho \\ &= (2\pi) \cdot (-\cos \phi|_0^\pi) \cdot \left(\frac{R^3}{3}\right) \\ &= 2\pi \cdot (1 - (-1)) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

1.3.1 Aire d'une surface

L'aire d'une surface $z = f(x, y)$ sur un domaine D est :

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dA.$$

Exemple 30. Aire d'une sphère

Calculer l'aire d'une sphère de rayon R .

Solution : Considérons l'hémisphère supérieur : $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq R^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} A_{\text{hémisphère}} &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr = 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2}\right]_0^R = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

Donc l'aire totale de la sphère est $4\pi R^2$.

1.3.2 Intégrales de surface

Définition 1.3.1. Pour une surface paramétrée $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, l'intégrale de surface d'une fonction f est :

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, du \, dv$$

où $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ est le produit vectoriel des dérivées partielles.

Exemple 31. Flux à travers une surface Calculer le flux du champ $\mathbf{F} = (0, 0, z)$ à travers la surface S du paraboloïde $z = x^2 + y^2$ pour $0 \leq z \leq 1$.

Solution : Paramétrisons : $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$ avec $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 2r), \quad \mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\ \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta\| = \sqrt{4r^4 \cos^2 \theta + 4r^4 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

Le flux est :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Avec $\mathbf{F} = (0, 0, z) = (0, 0, r^2)$, et la normale orientée vers le haut :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D (0, 0, r^2) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

1.4 Applications physiques

1.4.1-Masse et centre de masse

Pour un solide E de densité $\delta(x, y, z)$:

- **Masse** : $M = \iiint_E \delta(x, y, z) dV$
- **Centre de masse** : $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ avec

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_E x \delta(x, y, z) dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_E y \delta(x, y, z) dV, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_E z \delta(x, y, z) dV.$$

1.4.2-Moments d'inertie

Moment d'inertie par rapport à un axe :

- Par rapport à l'axe Oz :

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

- Par rapport à l'axe Ox :

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

- Par rapport à l'axe Oy :

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV$$

Exemple 32. Centre de masse d'un hémisphère

Trouver le centre de masse d'un hémisphère solide de rayon R , de densité constante δ_0 , situé au-dessus du plan xy .

Solution : Par symétrie, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Calculons \bar{z} .

Masse : $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \delta_0$ (demi-volume d'une sphère). En coordonnées sphériques : $z = \rho \cos \phi$, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$, avec $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_E z \delta_0 dV = \frac{\delta_0}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R (\rho \cos \phi) (\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{\delta_0}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\delta_0}{M} (2\pi) \cdot \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\delta_0}{M} (2\pi) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \delta_0 R^4}{4M} \end{aligned}$$

Avec $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \delta_0$, on obtient :

$$\bar{z} = \frac{\pi \delta_0 R^4}{4} \cdot \frac{3}{2\pi \delta_0 R^3} = \frac{3R}{8}$$

Exemple 33. Masse d'un cône

Trouver la masse d'un cône de hauteur h et de rayon de base R , si la densité en un point est proportionnelle à la distance du point à la base.

Solution : Prenons le cône avec sommet à l'origine et base à

$$z = h : z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \text{La densité : } \delta(x, y, z) = k(h - z).$$

En coordonnées cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, avec $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq \frac{R}{h}z$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Jacobien : r .

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E \delta(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{(R/h)z} k(h - z) r dr dz d\theta \\ &= 2\pi k \int_0^h (h - z) \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{(R/h)z} dz \\ &= \pi k \int_0^h (h - z) \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \right) dz \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \int_0^h (hz^2 - z^3) dz \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \left[h \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\pi k R^2 h^2}{12} \end{aligned}$$

1.5 Techniques de calcul

1- Choix des coordonnées

- **Coordonnées cartésiennes** : Pour des domaines rectangulaires,
- **Coordonnées polaires/cylindriques** : Pour des domaines à symétrie circulaire/cylindrique,
- **Coordonnées sphériques** : Pour des domaines à symétrie sphérique

2- Ordre d'intégration

Le choix de l'ordre d'intégration peut simplifier considérablement le calcul.

3- Symétries

Exploiter les symétries du domaine et de la fonction pour réduire le calcul :

- Fonction paire/impaire
- Symétries par rapport aux plans coordonnés
- Invariance par rotation

1.6 Exercices Corrigés

Intégrales doubles

Exercice 1. Calculer l'intégrale double :

$$\iint_D (x + 2y) dA$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Solution 1. L'intégrale se calcule comme une intégrale itérée :

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x + 2y) \, dA &= \int_0^2 \int_0^1 (x + 2y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^2 [xy + y^2]_{y=0}^{y=1} \, dx \\
 &= \int_0^2 (x + 1) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 \\
 &= \left(\frac{4}{2} + 2 \right) - 0 = 2 + 2 = 4
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer l'aire de la région D délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = x$.

Solution 2. Trouvons d'abord les points d'intersection :

$$x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^2 \leq x$, donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(D) &= \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx \\
 &= \int_0^1 (x - x^2) \, dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale double :

$$\iint_D xy \, dA$$

où D est la région du premier quadrant délimitée par $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ et $x = 2$.

Solution 3. La région D peut être décrite comme :

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x\}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dA &= \int_1^2 \int_x^{2x} xy \, dy \, dx \\
 &= \int_1^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=2x} dx \\
 &= \int_1^2 x \left(\frac{(2x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_1^2 x \left(2x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_1^2 x \cdot \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2} \int_1^2 x^3 dx \\
 &= \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{8}
 \end{aligned}$$

Changement de variables

Exercice 4. Calculer l'intégrale :

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dA$$

où D est le disque unité $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solution 4. Utilisons les coordonnées polaires : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, avec $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Le jacobien est r .

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{-x^2-y^2} \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r e^{-r^2} \, dr \\
 &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 \\
 &= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \pi(1 - e^{-1})
 \end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer l'aire de la région D délimitée par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Solution 5. Utilisons le changement de variables : $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$, avec $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Le jacobien est :

$$J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = abr$$

L'aire est donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(D) &= \iint_D dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, dr \, d\theta \\
 &= ab \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r \, dr \\
 &= ab \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi ab
 \end{aligned}$$

Exercice 6. Calculer l'intégrale :

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dA$$

où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Solution 6. La région D est le quart de disque unité dans le premier quadrant. En coordonnées polaires :

$$D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, posons $u = 1 + r^2$, alors $du = 2r dr$, donc $r dr = \frac{1}{2} du$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^2} dr &= \frac{1}{2} \int_{u=1}^{u=2} \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dA = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Intégrales triples

Exercice 7. Calculer l'intégrale triple :

$$\iiint_E xyz dV$$

où $E = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

Solution 7.

$$\begin{aligned} \iiint_E xyz dV &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xyz dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=3} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 xy \cdot \frac{9}{2} dy dx \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 x \left(\int_0^2 y dy \right) dx \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx \\ &= \frac{9}{2} \int_0^1 x \cdot 2 dx = 9 \int_0^1 x dx = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer le volume du solide délimité par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

Solution 8. Le solide est décrit par $0 \leq z \leq 4$ et pour chaque z , (x, y) vérifie $x^2 + y^2 \leq z$. En coordonnées cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, avec $0 \leq z \leq 4$, $0 \leq r \leq \sqrt{z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^4 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{z}} dz \\ &= 2\pi \int_0^4 \frac{z}{2} dz = \pi \int_0^4 z \, dz \\ &= \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

Exercice 9. Calculer l'intégrale triple :

$$\iiint_E z \, dV$$

où E est le solide délimité par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et les plans $z = 0$ et $z = x + y + 2$.

Solution 9. Utilisons les coordonnées cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, avec $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, et $0 \leq z \leq r \cos \theta + r \sin \theta + 2$.

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r \cos \theta + r \sin \theta + 2} z \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{r \cos \theta + r \sin \theta + 2} dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (r \cos \theta + r \sin \theta + 2)^2 dr \, d\theta \end{aligned}$$

Développons :

$$(r \cos \theta + r \sin \theta + 2)^2 = r^2(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 4r(\cos \theta + \sin \theta) + 4$$

Donc :

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [r^3(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 4r^2(\cos \theta + \sin \theta) + 4r] dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}(\cos \theta + \sin \theta)^2 + \frac{4}{3}(\cos \theta + \sin \theta) + 2 \right] d\theta \end{aligned}$$

Calculons chaque terme :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta = 2\pi + 0 = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} 2 d\theta &= 4\pi \end{aligned}$$

Donc :

$$\iiint_E z \, dV = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi + 0 + 4\pi \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}$$

Applications physiques

Exercice 10. Trouver la masse d'un cône solide de hauteur h et de rayon de base R , si la densité en un point est proportionnelle à la distance du point à la base.

Solution 10. Plaçons le cône avec son sommet à l'origine et sa base à $z = h$. L'équation du cône : $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$. La densité : $\delta(x, y, z) = k(h - z)$, où k est une constante.

En coordonnées cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, avec $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq \frac{R}{h}z$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E \delta(x, y, z) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{(R/h)z} k(h - z) \cdot r dr dz d\theta \\ &= 2\pi k \int_0^h (h - z) \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{(R/h)z} dz \\ &= \pi k \int_0^h (h - z) \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \right) dz \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \int_0^h (hz^2 - z^3) dz \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \left[h \cdot \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi k R^2}{h^2} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\pi k R^2 h^2}{12} \end{aligned}$$

Exercice 11. Trouver le centre de masse d'un hémisphère solide de rayon R et de densité constante δ_0 .

Solution 11. Plaçons l'hémisphère au-dessus du plan xy : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$. Par symétrie, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Calculons \bar{z} :

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_E z \delta_0 dV$$

où $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \delta_0$ (demi-volume de la sphère).

En coordonnées sphériques : $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$, avec $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$.

$$\begin{aligned} \iiint_E z \delta_0 dV &= \delta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \delta_0 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \delta_0 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \\ &= \delta_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \delta_0 R^4}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{z} = \frac{\pi \delta_0 R^4}{4} \cdot \frac{3}{2\pi \delta_0 R^3} = \frac{3R}{8}$$

Le centre de masse est en $(0, 0, \frac{3R}{8})$.

Exercice 12. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du solide délimité par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z = 1$, avec densité constante δ_0 .

Solution 12. Le solide est un cône tronqué. En coordonnées cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, avec $r \leq z \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Le moment d'inertie par rapport à Oz est :

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \delta_0 dV = \delta_0 \iiint_E r^2 dV$$

En coordonnées cylindriques, $dV = r dr d\theta dz$, donc :

$$\begin{aligned} I_z &= \delta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r^2 \cdot r dz dr d\theta \\ &= \delta_0 \cdot 2\pi \int_0^1 \int_r^1 r^3 dz dr \\ &= 2\pi \delta_0 \int_0^1 r^3 (1-r) dr \\ &= 2\pi \delta_0 \int_0^1 (r^3 - r^4) dr \\ &= 2\pi \delta_0 \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \delta_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 2\pi \delta_0 \cdot \frac{1}{20} = \frac{\pi \delta_0}{10} \end{aligned}$$

Exercices avancés

Exercice 13. Calculer le volume du solide commun à deux cylindres de rayon R dont les axes se coupent perpendiculairement : $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $x^2 + z^2 \leq R^2$.

Solution 13. Par symétrie, calculons le volume dans le premier octant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) et multiplions par 8.

Dans le premier octant, pour un x fixé entre 0 et R , on a y variant de 0 à $\sqrt{R^2 - x^2}$ (d'après $x^2 + y^2 \leq R^2$) et z variant de 0 à $\sqrt{R^2 - x^2}$ (d'après $x^2 + z^2 \leq R^2$).

Donc :

$$\begin{aligned} V_{1er\ octant} &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dz dy dx \\ V_{1er\ octant} &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy dx \\ &= \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3} \end{aligned}$$

Le volume total est donc :

$$V = 8 \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{16R^3}{3}$$

Exercice 14. Calculer l'intégrale triple :

$$\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dV$$

où E est la région entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, avec $0 < a < b$.

Solution 14. Utilisons les coordonnées sphériques : $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$, avec $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$.

$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{1}{\rho^3} \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \cdot \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\
&= 2\pi \cdot [-\cos \phi]_0^\pi \cdot [\ln \rho]_a^b \\
&= 2\pi \cdot (1 - (-1)) \cdot (\ln b - \ln a) \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot \ln \left(\frac{b}{a}\right) = 4\pi \ln \left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 15. Trouver l'aire de la partie de la surface $z = xy$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Solution 15. L'aire d'une surface $z = f(x, y)$ sur un domaine D est :

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA$$

Ici, $f(x, y) = xy$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, et $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\sqrt{1 + y^2 + x^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} \cdot r \, dr \, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} \, dr
\end{aligned}$$

Posons $u = 1 + r^2$, alors $du = 2r \, dr$, donc $r \, dr = \frac{1}{2} du$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} \, dr &= \frac{1}{2} \int_{u=1}^{u=2} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

Donc :

$$A = 2\pi \cdot \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

Exercices supplémentaires

Exercice 16. Calculer

$$\iiint_E xyz \, dV$$

où E est le cube $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

Solution 16. Le domaine E est un parallélépipède rectangle, l'intégrale triple se factorise donc :

$$\iiint_E xyz \, dV = \left(\int_0^1 x \, dx \right) \left(\int_0^2 y \, dy \right) \left(\int_0^3 z \, dz \right).$$

Calculons chaque intégrale simple :

$$\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \quad \int_0^2 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{2} = 2, \quad \int_0^3 z \, dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Le produit donne

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{2} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\iiint_E xyz \, dV = \frac{9}{2}}.$$

Exercice 17. Calculer le volume délimité par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

Solution 17. Le volume est compris entre la surface $z = x^2 + y^2$ (en dessous) et le plan $z = 4$ (au-dessus). La projection sur le plan xy est le disque $x^2 + y^2 \leq 4$ (car $z \leq 4$). En coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dA = r \, dr \, d\theta,$$

avec $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Le volume s'écrit

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4 - (x^2 + y^2)) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta.$$

Calculons d'abord l'intégrale en r :

$$\int_0^2 (4r - r^3) \, dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2 \cdot 4 - \frac{16}{4} = 8 - 4 = 4.$$

Puis l'intégrale en θ donne un facteur 2π . Donc

$$V = 2\pi \times 4 = 8\pi.$$

Exercice 18. Trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du solide délimité par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z = 1$, avec densité constante.

Solution 18. Le solide est un cône de sommet l'origine, limité par le plan $z = 1$. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'équation du cône devient $z = r$. Le domaine est donc

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq r \leq z.$$

Le moment d'inertie par rapport à Oz est

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) \rho \, dV = \rho \iiint r^2 \cdot (r \, dr \, d\theta \, dz) = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z r^3 \, dr \, dz \, d\theta.$$

On calcule successivement :

$$\int_0^z r^3 \, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^z = \frac{z^4}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{z^4}{4} \, dz = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20},$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Ainsi,

$$I_z = \rho \times 2\pi \times \frac{1}{20} = \frac{\rho\pi}{10}.$$

Si l'on prend une densité unité $\rho = 1$, alors

$$\boxed{I_z = \frac{\pi}{10}}.$$

Exercice 19. Calculer

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$$

où D est la région entre les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$.

Solution 19. En coordonnées polaires, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et $dA = r dr d\theta$. L'intégrande devient

$$\frac{1}{r} \times r dr d\theta = dr d\theta.$$

Le domaine D est la couronne $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. L'intégrale se ramène donc à

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 1) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

Exercice 20. Trouver le volume commun à deux cylindres de rayon R dont les axes se coupent perpendiculairement : $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $x^2 + z^2 \leq R^2$.

Solution 20.

Méthode-1

Le solide est l'intersection de deux cylindres droits :

— **Cylindre 1** : axe parallèle à Oz , de rayon R , donné par $x^2 + y^2 \leq R^2$.

— **Cylindre 2** : axe parallèle à Oy , de rayon R , donné par $x^2 + z^2 \leq R^2$.

Le volume commun est symétrique par rapport aux trois plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. On peut donc calculer le volume dans le premier octant ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) et multiplier par 8.

Dans le premier octant, pour une valeur fixée de x comprise entre 0 et R , les variables y et z sont limitées par les inégalités issues des cylindres :

$$y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, \quad z \leq \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Ainsi, pour chaque x , la section transverse est un carré de côté $\sqrt{R^2 - x^2}$ dans le plan y, z . Le volume élémentaire dans le premier octant est donc

$$dV = (\sqrt{R^2 - x^2}) \times (\sqrt{R^2 - x^2}) dx = (R^2 - x^2) dx.$$

Le volume dans le premier octant s'obtient en intégrant pour x de 0 à R :

$$V_{\text{octant}} = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R^3.$$

Le volume total est huit fois cette valeur :

$$V = 8 \times \frac{2}{3} R^3 = \frac{16}{3} R^3.$$

Méthode-2

On peut également écrire l'intégrale triple en coordonnées cartésiennes. Par symétrie, le volume total est

$$V = 8 \iiint_D 1 dV, \quad \text{où } D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x^2 + z^2 \leq R^2\}$$

En intégrant d'abord sur y et z pour x fixé, on retrouve le même calcul :

$$V = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dz \right) dx = \int_{-R}^R 4(R^2 - x^2) dx.$$

Par parité, cela donne

$$V = 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 8 \times \frac{2}{3} R^3 = \frac{16}{3} R^3.$$

Conclusion

Le volume commun aux deux cylindres est

$$V = \frac{16}{3} R^3.$$

Intégrales Impropres (Généralisées)

Les intégrales impropres étendent le calcul intégral à des situations plus générales que l'intégrale de Riemann. La maîtrise des critères de convergence et des techniques de calcul est essentielle pour leur utilisation en analyse, physique et probabilités. Les intégrales impropres jouent un rôle fondamental dans de nombreuses théories mathématiques, des séries de Fourier aux transformations intégrales.

Les intégrales impropres généralisent la notion d'intégrale de Riemann aux cas où :

1. L'intervalle d'intégration n'est pas borné (première espèce)
2. La fonction à intégrer n'est pas bornée sur l'intervalle (deuxième espèce)
3. Une combinaison des deux (mixte)

2.1 Définitions fondamentales

2.1.1 Intégrales impropres de première espèce

Définition 2.1.1. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. On définit :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

si cette limite existe et est finie.

De même :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

2.1.2 Intégrales impropres de deuxième espèce

Définition 2.1.2. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable sur $[a, b[$ mais non bornée au voisinage de b . On définit :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

2.1.3 Convergence et divergence

- L'intégrale est **convergente** si la limite existe et est finie
- L'intégrale est **divergente** si la limite n'existe pas ou est infinie
- On parle de **convergence absolue** si $\int |f(x)| dx$ converge
- La convergence absolue implique la convergence simple (mais pas réciproquement)

2.2 Intégrales impropres de première espèce

Définition formelle

Définition 2.2.1. Pour f continue sur $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

L'intégrale converge si cette limite est finie.

▷ **Exemple fondamental :**

1-Intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{converge si et seulement si } p > 1$$

Démonstration : Pour $p \neq 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}$$

— Si $p > 1$:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = 0,$$

donc la limite est $\frac{1}{p-1}$

— Si $p < 1$:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = +\infty,$$

donc divergence

— Si $p = 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b \rightarrow +\infty$$

2-Intégrale de l'exponentielle

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Démonstration :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

3-Intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cette intégrale se calcule par des méthodes avancées (coordonnées polaires). (voir exemple 26)

2.3 Intégrales impropres de deuxième espèce

Définition formelle

Définition 2.3.1. Si f est continue sur $]a, b]$ mais non bornée au voisinage de a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

▷ Exemple fondamental :

1-Critère de Riemann en "0"

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad \text{converge si et seulement si } p < 1$$

Démonstration : Pour $p \neq 1$:

$$\int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_c^1 = \frac{1 - c^{1-p}}{1-p}$$

— Si $p < 1$: $\lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-p} = 0$, donc la limite est $\frac{1}{1-p}$

— Si $p > 1$: $\lim_{c \rightarrow 0^+} c^{1-p} = +\infty$, donc divergence

— Si $p = 1$: $\int_c^1 \frac{1}{x} dx = -\ln c \rightarrow +\infty$

2-Intégrale avec singularité en "0"

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Démonstration :

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c} \rightarrow 2 \quad \text{quand } c \rightarrow 0^+$$

3-Intégrale logarithmique

$$\int_0^1 \ln x dx = -1$$

Démonstration :

$$\int_c^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_c^1 = (-1) - (c \ln c - c)$$

Comme $\lim_{c \rightarrow 0^+} c \ln c = 0$, on obtient -1 .

2.4 Intégrales impropres mixtes

Définition 2.4.1. Les intégrales peuvent être impropres aux deux bornes ou en un point intérieur. Par exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

où c est un point quelconque.

1-Intégrale de Cauchy principale

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ n'existe pas au sens usuel, mais on peut définir la valeur principale :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

2-Intégrale sur tout \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Démonstration :

$$\int_{-b}^b \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-b}^b = \arctan b - \arctan(-b) = 2 \arctan b \rightarrow \pi$$

2.5 Critères de convergence

2.5.1 Critères de comparaison

Théorem 2.5.1 (Critère de comparaison). Soient f et g continues sur $[a, +\infty[$ avec $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour $x \geq a$.

1. Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge
2. Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge

2.5.2 Critère des équivalents

Théorem 2.5.2 (Critère des équivalents). Si $f \sim g$ en $+\infty$ et $f, g \geq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ ont même nature.

2.5.3 Critère d'Abel et Dirichlet

Théorem 2.5.3 (Critère d'Abel). Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge et g est monotone bornée, alors $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge.

Théorem 2.5.4 (Critère de Dirichlet). Si $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ est bornée et g est monotone tendant vers 0 en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge.

2.5.4 Intégrale de Bertrand

Intégrale sur tout \mathbb{R}

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2.5.5 Convergence absolue et semi-convergence

Définition 2.5.1.

- **Convergence absolue** : $\int |f(x)| dx$ converge
- **Convergence conditionnelle (semi-convergence)** : $\int f(x) dx$ converge mais $\int |f(x)| dx$ diverge

Exemple 34. Intégrale semi-convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{converge (conditionnellement)}$$

mais

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \quad \text{diverge}$$

Solution : On applique le critère de Dirichlet avec $f(x) = \sin x$ (intégrale bornée) et $g(x) = 1/x$ (décroissante vers 0).

Pour la divergence de l'intégrale absolue, on remarque que :

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ diverge.

Exemple 35. Intégrale absolument convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad \text{converge absolument}$$

car $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

2.5.6 Convergence uniforme

Théorème 2.5.5. Soit $(f_t)_{t \in I}$ une famille de fonctions intégrables. Si :

1. $f_t(x) \rightarrow f(x)$ pour presque tout x quand $t \rightarrow t_0$
2. Il existe g intégrable telle que $|f_t(x)| \leq g(x)$ pour tout t

Alors

$$\int f_t(x) dx \rightarrow \int f(x) dx.$$

2.6 Techniques de calcul

2.6.1- Intégration par parties

Pour les intégrales impropres, l'intégration par parties s'applique sous forme limite.

Exemple 36.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$$

Solution :

$$\int_0^b x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^b + \int_0^b e^{-x} dx = -b e^{-b} + [-e^{-x}]_0^b$$

Comme $\lim_{b \rightarrow +\infty} b e^{-b} = 0$, on obtient $0 + (0 + 1) = 1$.

2.6.2- Changement de variable

Les changements de variables doivent être effectués avec soin pour les intégrales impropres.

Exemple 37.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solution : Par changement de variable $x = \tan t$, $dx = (1 + \tan^2 t) dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

2.6.3- Intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

2.7 Exercices corrigés

2.7.1 Intégrales impropres de première espèce

Exercice 21. Étudier la convergence et calculer si possible :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Solution 21. Il s'agit d'une intégrale impropre de première espèce (intervalle non borné). Pour $b > 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{b} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$

L'intégrale converge et vaut 1.

Exercice 22. Étudier la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Solution 22. Pour $b > 1$:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\ln b \rightarrow +\infty$, donc la limite n'est pas finie. L'intégrale diverge vers $+\infty$.

Exercice 23. Étudier la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

Solution 23. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = 1 - e^{-b}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $e^{-b} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

L'intégrale converge et vaut 1.

Exercice 24. Étudier la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Solution 24. On utilise le critère de comparaison. Pour $x \geq 1$:

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (d'après l'exercice 1). Donc par comparaison, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ converge, ce qui implique la convergence absolue, donc la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

2.7.2 Intégrales impropres de deuxième espèce

Exercice 25. Étudier la convergence et calculer si possible :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Solution 25. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 0. Pour $0 < \epsilon < 1$:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_\epsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0^+$, $\sqrt{\epsilon} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

L'intégrale converge et vaut 2.

Exercice 26. Étudier la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

Solution 26. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 0. Pour $0 < \epsilon < 1$:

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\epsilon}^1 = -\ln \epsilon$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0^+$, $-\ln \epsilon \rightarrow +\infty$, donc l'intégrale diverge vers $+\infty$.

Exercice 27. Étudier la convergence et calculer :

$$\int_0^1 \ln x dx$$

Solution 27. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 0. Pour $0 < \epsilon < 1$:

$$\int_{\epsilon}^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_{\epsilon}^1 = (-1) - (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)$$

On sait que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \ln \epsilon = 0$, donc :

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-1 - \epsilon \ln \epsilon + \epsilon] = -1$$

L'intégrale converge et vaut -1.

Exercice 28. Étudier la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

Solution 28. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 0. Au voisinage de 0, $\sin x \sim x$, donc :

$$\frac{\sin x}{x^{3/2}} \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge (d'après l'exercice 5). Par équivalence des fonctions positives, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ converge.

2.7.3 Intégrales impropres mixtes

Exercice 29. Étudier la convergence et calculer si possible :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Solution 29. C'est une intégrale impropre de première espèce. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^b = \arctan b$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\arctan b \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 30. Étudier la convergence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Solution 30. Par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Montrons que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b e^{-x^2} dx$$

existe comme intégrale d'une fonction continue. Pour $x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, et $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge par comparaison. Sur $[0, 1]$, la fonction est bornée continue, donc l'intégrale est propre.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. On sait que sa valeur est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Exercice 31. Étudier la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solution 31. L'intégrale est impropre en 0 (fonction non bornée) et en $+\infty$ (intervalle non borné). Séparons en deux :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Pour $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$: en 0, $e^{-x} \sim 1$, donc $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Pour $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$: pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$, et $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

Donc les deux intégrales convergent. Calculons la valeur. Posons $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$, $dx = 2t dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} \cdot 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Exercice 32. Étudier la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Solution 32. L'intégrale est impropre en $+\infty$ (intervalle non borné) et en 0 (mais $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0, donc pas d'impropreté en 0).

Étudions la convergence en $+\infty$. On ne peut pas utiliser le critère de comparaison absolue car $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge. Utilisons le critère de Dirichlet.

Soit $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Alors : - g est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ - Les primitives de f sont bornées : $\left| \int_0^b \sin x dx \right| = |1 - \cos b| \leq 2$

Donc par le critère de Dirichlet, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge (convergence conditionnelle)(semi-convergence). On sait que sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.

2.7.4 Critères de convergence

Exercice 33. Étudier la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x+1} dx$$

Solution 33.

$$\text{En } +\infty, \frac{x+1}{x^3+2x+1} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Par équivalence des fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x+1} dx$ converge.

Exercice 34. Étudier la convergence de :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Solution 34. Pour $b > 2$:

$$\int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_2^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\ln(\ln b) \rightarrow +\infty$, donc l'intégrale diverge vers $+\infty$.

Exercice 35. Étudier la convergence de :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

Solution 35. Pour $b > 2$:

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^b = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\ln b} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \frac{1}{\ln 2}$$

L'intégrale converge.

Exercice 36. Étudier la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

Solution 36. La fonction est non bornée au voisinage de 0.

$$\text{En } 0, \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \text{ converge.}$$

Par équivalence des fonctions positives,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ converge.}$$

2.7.5 Convergence absolue et conditionnelle

Exercice 37. Étudier la convergence (absolue et conditionnelle) de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Solution 37. Nous avons déjà vu que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{converge (conditionnellement) par le critère de Dirichlet.}$$

Montrons que

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx, \quad \text{diverge.}$$

On a :

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

Or :

$$- \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx \text{ diverge}$$

$$- \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx \text{ converge (par Dirichlet, car } \frac{1}{2x} \text{ décroît vers 0 et les primitives de } \cos 2x \text{ sont bornées)}$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} \right) dx, \quad \text{diverge}$$

(comme somme d'une intégrale divergente et d'une convergente).

Par comparaison,

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx, \quad \text{diverge.}$$

Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{converge conditionnellement.}$$

Exercice 38. Étudier la convergence (absolue et conditionnelle) de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Solution 38. On a

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad \text{converge.}$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx, \quad \text{converge}$$

ce qui implique la convergence absolue de l'intégrale donnée.

Exercice 39. Étudier la convergence (absolue et conditionnelle) de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$$

Solution 39. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

$$\text{En } 0, \quad \frac{\sin(x^2)}{x} \sim x,$$

donc pas de singularité en 0 (la fonction est prolongeable par continuité en 0). L'intégrale est donc impropre seulement en $+\infty$.

Posons $t = x^2$, alors $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

D'après la convergence conditionnellement (semi-convergence) de, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. (voir l'exercice 37). Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx \text{ converge conditionnellement.}$$

Exercice 40. Étudier la convergence (absolue et conditionnelle) de :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

Solution 40. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 0 (car $\sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$ en 0).

$$\text{En } 0, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \text{ converge.}$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx, \text{ converge.}$$

De plus, la fonction est positive sur $[0, \pi/2]$, donc la convergence absolue est équivalente à la convergence simple. L'intégrale converge absolument.

2.7.6 Calculs d'intégrales impropres

Exercice 41. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3} dx$$

Solution 41. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b \frac{1}{(1+x)^3} dx = \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+b)^2}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(1+b)^2} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 42. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

Solution 42. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-b^2}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $e^{-b^2} \rightarrow 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 43. Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Solution 43. La fonction n'est pas bornée au voisinage de 1. Pour $0 < b < 1$:

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^b = \arcsin b$$

Quand $b \rightarrow 1^-$, $\arcsin b \rightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 44. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad \text{avec } a > 0$$

Solution 44. Pour $b > 0$:

$$\int_0^b \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} [\arctan(x/a)]_0^b = \frac{1}{a} \arctan(b/a)$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, $\arctan(b/a) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

Exercice 45. Nature d'une intégrale

Étudier la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx.$$

Solution 45. On compare avec l'intégrale de Riemann.

- Si $p > 1$: $\frac{\ln x}{x^p} = o\left(\frac{1}{x^q}\right)$ pour $1 < q < p$, donc convergence
- Si $p < 1$: $\frac{\ln x}{x^p} \geq \frac{1}{x^p}$ pour x assez grand, donc divergence
- Si $p = 1$: $\int_1^b \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b \rightarrow +\infty$, divergence

Donc convergence si et seulement si $p > 1$.

Exercice 46. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

Solution 46. Changement de variable $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u du$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)u} \cdot 2u du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 2[\arctan u]_0^{+\infty} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Exercice 47. Convergence absolue

Étudier la convergence absolue de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx.$$

Solution 47. — Si $p > 1$: $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$, donc convergence absolue

- Si $0 < p \leq 1$: divergence de l'intégrale absolue (comparaison avec $\frac{\sin^2 x}{x^p}$)
- Si $p > 0$: convergence simple par Dirichlet
- Si $p \leq 0$: divergence

Exercice 48. Montrer que l'intégrale de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

converge et calculer sa valeur (on pourra utiliser le changement de variable $t = x^2$ et l'intégrale de Dirichlet).

Intégrale	Condition de convergence	Valeur si convergente
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$	$p > 1$	$\frac{1}{p-1}$
$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$	$p < 1$	$\frac{1}{1-p}$
$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$	$a > 0$	$\frac{1}{a}$
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$	Convergence conditionnelle	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$	Toujours	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$	$n > -1$	$\Gamma(n+1)$

TABLE 2.1 – Résumé des intégrales impropres usuelles

Solution 48. Posons $t = x^2$, alors $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Cette intégrale converge par le critère de Dirichlet (car $\frac{1}{\sqrt{t}}$ décroît vers 0 et les primitives de $\sin t$ sont bornées).

Pour calculer sa valeur, considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour $a > 0$. Par dérivation sous le signe intégral par rapport à a , on peut obtenir $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$. Une autre méthode utilise l'intégrale double en coordonnées polaires pour montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 49. Étudier la convergence de l'intégrale de Bertrand :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

selon les valeurs de $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Solution 49. Cas 1 : $\alpha > 1$. Alors pour x assez grand, $x^\alpha (\ln x)^\beta \geq x^\alpha$, donc $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge pour $\alpha > 1$. Donc par comparaison, l'intégrale converge.

Cas 2 : $\alpha < 1$. Alors pour x assez grand, $x^\alpha (\ln x)^\beta \leq x$, donc $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \geq \frac{1}{x}$. Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Donc par comparaison, l'intégrale diverge.

Cas 3 : $\alpha = 1$. Alors :

$$\int_2^b \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{u^\beta} du \quad (\text{avec } u = \ln x)$$

Cette intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$.

En résumé : - Si $\alpha > 1$: convergence pour tout β - Si $\alpha = 1$: convergence si $\beta > 1$, divergence si $\beta \leq 1$ - Si $\alpha < 1$: divergence pour tout β

Exercice 50. Calculer l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

en utilisant la transformée de Laplace.

Solution 50. Méthode de Feynman : Considérons

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx, \quad \text{pour } a \geq 0.$$

Alors

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad I(+\infty) = 0.$$

Dérivons $I(a)$ par rapport à a (justification par convergence dominée) :

$$I'(a) = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

Cette intégrale se calcule :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1+a^2} \quad (\text{par deux intégrations par parties}).$$

Donc

$$I'(a) = -\frac{1}{1+a^2}.$$

En intégrant :

$$I(a) = -\arctan a + C$$

Pour déterminer la constante, on a

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} (-\arctan a) = -\frac{\pi}{2},$$

donc $C = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

En particulier pour $a = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 51. Étudier la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

selon la valeur de $p \in \mathbb{R}$.

Solution 51. L'intégrale est impropre en 0 (si $p < 1$) et en $+\infty$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

$$\text{En } 0 : \quad \frac{x^{p-1}}{1+x} \sim x^{p-1}.$$

Or

$$\int_0^1 x^{p-1} dx, \quad \text{converge si et seulement si } p-1 > -1, \text{ c'est-à-dire } p > 0.$$

$$\text{En } +\infty : \quad \frac{x^{p-1}}{1+x} \sim x^{p-2}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} x^{p-2} dx, \quad \text{converge si et seulement si } p-2 < -1, \text{ c'est-à-dire } p < 1.$$

Donc l'intégrale converge si et seulement si $0 < p < 1$.

Dans ce cas, on peut calculer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad (\text{c'est une formule classique}).$$

Équations Différentielles

Ce document propose un résumé des concepts fondamentaux des équations différentielles ordinaires (EDO), accompagné d'exercices détaillés avec solutions. Il couvre la classification, les méthodes de résolution analytiques pour les équations du premier et second ordre, les systèmes linéaires, ainsi que des applications classiques.

Ce résumé est basé sur des cours classiques d'équations différentielles. Pour approfondir, le lecteur pourra consulter des ouvrages tels que "Équations différentielles" de V. Arnold ou "Ordinary Differential Equations" de Tenenbaum et Pollard.

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Les équations différentielles sont des équations mettant en relation une fonction inconnue et ses dérivées. Elles sont essentielles pour modéliser l'évolution de systèmes dynamiques en physique, biologie, économie, etc.

3.1.1 Définitions fondamentales

Définition 3.1.1 (Équation différentielle ordinaire (EDO)). Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est une relation de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où $y = y(x)$ est la fonction inconnue et $y^{(k)}$ désigne sa dérivée d'ordre k . L'**ordre** de l'équation est celui de la dérivée la plus élevée.

Définition 3.1.2 (EDO linéaire). Une EDO est dite **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Si $g(x) = 0$, l'équation est **homogène** ; sinon, elle est **inhomogène** (ou avec second membre).

Exemple 38. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est linéaire homogène d'ordre 2. L'équation $y' = y^2$ est non linéaire.

3.1.2 Problème de Cauchy (valeur initiale)

Un problème de Cauchy (ou problème à valeur initiale) consiste à trouver une solution $y(x)$ d'une EDO d'ordre n vérifiant n conditions initiales du type :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

3.2 Méthodes de résolution analytique

3.2.1 Équations du premier ordre

a- Équations à variables séparables

Elles sont de la forme : $y' = f(x)g(y)$. On sépare les variables : $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ puis on intègre.

b- Équations linéaires

Elles sont de la forme : $y' + a(x)y = b(x)$.

La solution générale s'obtient par la méthode du facteur intégrant :

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx}, \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)b(x)dx + C \right).$$

c- Équations exactes

$$\text{Une équation } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ est exacte si } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Il existe alors une fonction $F(x, y)$ telle que $dF = Mdx + Ndy$, et la solution est $F(x, y) = C$.

d- Substitutions classiques

Équations	Substitutions classiques
Équations homogènes $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	On pose : $u = y/x$
Équation de Bernoulli $y' + a(x)y = b(x)y^n$	On pose $z = y^{1-n}$
Équation de Riccati $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$	voir l'exemple sous dessus

Exemple 39 (Équation de Riccati). Soit l'équation de Riccati :

$$y' = x^2 + y^2,$$

dont on connaît une solution particulière $y_1(x) = -\frac{1}{x}$. Résoudre l'équation.

Solution : On pose $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Alors $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$. En substituant dans l'équation :

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = x^2 + \left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 = x^2 + y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Mais y_1 est solution particulière, donc $y_1' = x^2 + y_1^2$. En simplifiant, on obtient :

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Multiplions par $-z^2$:

$$z' = -2y_1z - 1.$$

Remplaçons $y_1 = -\frac{1}{x}$:

$$z' = -2 \left(-\frac{1}{x} \right) z - 1 = \frac{2}{x} z - 1.$$

C'est une équation linéaire : $z' - \frac{2}{x}z = -1$. Facteur intégrant $\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = x^{-2}$. Multiplions :

$$x^{-2}z' - 2x^{-3}z = -x^{-2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-2}z) = -x^{-2}.$$

Intégrons : $x^{-2}z = \frac{1}{x} + C$, donc $z = x + Cx^2$. Ainsi,

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x + Cx^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(1 + Cx)}.$$

On peut simplifier :

$$y(x) = \frac{-(1 + Cx) + 1}{x(1 + Cx)} = \frac{-Cx}{x(1 + Cx)} = -\frac{C}{1 + Cx}.$$

Si on pose $K = -C$, on obtient $y = \frac{K}{1 - Kx}$ (forme courante). Notons que la solution particulière correspond au cas $K = 0$ (i.e. $C = 0$).

3.2.2 Équations linéaires du second ordre

a- Coefficients constants

Pour l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

on cherche des solutions de la forme $y = e^{rx}$.

L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ donne :

— Deux racines réelles distinctes r_1, r_2 :

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

— Une racine double r :

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

— Racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

b- Méthode des coefficients indéterminés

Pour une équation non homogène $ay'' + by' + cy = g(x)$ avec $g(x)$ de type polynomial, exponentiel, sinus ou cosinus, on cherche une solution particulière de forme analogue.

Exemple 40. Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'' + y = 2e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solution : L'équation homogène associée est $y'' + y = 0$ de solution $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Le second membre $2e^x$ n'est pas solution de l'homogène, on cherche une solution particulière de la forme $y_p = Ae^x$. En substituant : $y_p'' = Ae^x$, donc $Ae^x + Ae^x = 2Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 1$. Ainsi $y_p = e^x$.

La solution générale est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$. Conditions initiales :

$$y(0) = C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1,$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x \Rightarrow y'(0) = C_2 + 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Donc $y(x) = -\cos x + e^x$.

c- Méthode de variation des paramètres

Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène, une solution particulière est donnée par :

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 g}{W} dx$$

où $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ est le **wronskien**.

Exemple 41. Résoudre l'équation :

$$y'' + y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Solution : L'équation homogène $y'' + y = 0$ a pour solutions $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$. Le **wronskien** est $W = \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Une solution particulière par la méthode de variation des paramètres est donnée par :

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 g}{W} dx,$$

avec $g(x) = \tan x$. Ainsi :

$$y_p = -\cos x \int \sin x \tan x dx + \sin x \int \cos x \tan x dx.$$

Calculons les intégrales :

$$\begin{aligned} \int \sin x \tan x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int (\sec x - \cos x) dx = \ln |\sec x + \tan x| - \sin x + C_1. \\ \int \cos x \tan x dx &= \int \sin x dx = -\cos x + C_2. \end{aligned}$$

Prenons les constantes nulles pour une particulière. Alors :

$$y_p = -\cos x (\ln |\sec x + \tan x| - \sin x) + \sin x (-\cos x) = -\cos x \ln |\sec x + \tan x| + \cos x \sin x - \sin x \cos x.$$

Les termes $\cos x \sin x$ s'annulent, donc :

$$y_p = -\cos x \ln |\sec x + \tan x|.$$

La solution générale est $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$.

3.3 Systèmes linéaires

Un système linéaire d'ordre 1 s'écrit

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x).$$

Si A est constante, la solution homogène est $\mathbf{y} = e^{Ax}\mathbf{C}$, où l'exponentielle de matrice peut être calculée par diagonalisation ou par la méthode de Jordan.

Exemple 42. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Solution : Écrivons le système sous forme matricielle : $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = -(1 - \lambda)(3 + \lambda) + 4 \\ &= -(3 + \lambda - 3\lambda - \lambda^2) + 4 = -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Une seule valeur propre $\lambda = -1$ double. Cherchons un vecteur propre : $(A + I)v = 0$ donne $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v = 0$. Une équation : $2v_1 - v_2 = 0$, donc $v_2 = 2v_1$. Un vecteur propre est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il manque un second vecteur indépendant pour former une base de solutions. On cherche un vecteur généralisé w tel que $(A + I)w = v$. Soit $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La première ligne donne $2w_1 - w_2 = 1$, la seconde $4w_1 - 2w_2 = 2$ (identique). On peut prendre $w_1 = 0$, alors $w_2 = -1$ donne $0 - (-1) = 1$ ok. Donc $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La solution générale est :

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-t} v + C_2 e^{-t} (tv + w) = e^{-t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right].$$

Soit :

$$x(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t), \quad y(t) = e^{-t}(2C_1 + 2C_2 t - C_2).$$

Conditions initiales : $x(0) = C_1 = 1$; $y(0) = 2C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow 2 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2$. Donc :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(1 + 2t), \\ y(t) = e^{-t}(2 + 4t - 2) = e^{-t}(4t). \end{cases}$$

3.4 Équations aux Dérivées Partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des équations différentielles dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables indépendantes et qui impliquent les dérivées partielles de cette fonction. Elles sont fondamentales pour modéliser une vaste gamme de phénomènes physiques, biologiques, économiques et financiers

3.4.1 Définitions fondamentales

Définition 3.4.1 (EDP). Une équation aux dérivées partielles d'ordre m est une relation de la forme :

$$F \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right) = 0$$

où $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue, $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur des variables indépendantes, et F est une fonction donnée. L'ordre de l'EDP est celui de la dérivée partielle la plus élevée apparaissant dans l'équation.

Définition 3.4.2 (EDP linéaire). Une EDP est dite **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indice, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, et les coefficients a_α et le second membre f ne dépendent que de x (pas de u ni de ses dérivées).

- Si $f(x) = 0$, l'équation est dite **homogène**.
- Si $f(x) \neq 0$, l'équation est dite **inhomogène** (ou avec second membre).

Exemples 1.

1. L'équation de la chaleur

$$u_t = k u_{xx}$$

est une EDP linéaire homogène d'ordre 2.

2. L'équation de **Burgers**

$$u_t + u u_x = 0$$

est une EDP non linéaire d'ordre 1.

3.4.2 Classification des EDP linéaires du second ordre

Pour une EDP linéaire d'ordre 2 à deux variables indépendantes x et y , de forme générale :

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y)$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions de (x, y) , la classification se fait sur la base du signe du discriminant $\Delta = B^2 - AC$

- Si $\Delta > 0$: l'équation est **hyperbolique** (ex : équation des ondes $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$).
- Si $\Delta = 0$: l'équation est **parabolique** (ex : équation de la chaleur $u_t - k u_{xx} = 0$).
- Si $\Delta < 0$: l'équation est **elliptique** (ex : équation de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$).

Cette classification est cruciale car elle détermine le type de conditions aux limites/initiales à imposer et les propriétés qualitatives des solutions [citation :10].

3.4.3 Méthodes de résolution analytiques

a- Méthode des caractéristiques pour les EDP du premier ordre Considérons une EDP linéaire du premier ordre de la forme :

$$a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = d(x, t)$$

La méthode des caractéristiques consiste à trouver des courbes paramétriques $(x(s), t(s))$ le long desquelles l'EDP se réduit à une équation différentielle ordinaire (EDO) [citation :1][citation :7].

Les courbes caractéristiques sont définies par le système d'EDO :

$$\frac{dx}{ds} = a(x, t), \quad \frac{dt}{ds} = b(x, t)$$

Le long de ces courbes, la variation de u est donnée par :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} = au_x + bu_t = d(x, t) - c(x, t)u$$

On obtient ainsi une EDO pour $u(s)$ que l'on peut résoudre.

Exemple 43 (Équation de transport linéaire à coefficients constants). *On considère le problème de Cauchy :*

$$u_t + c u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad c \in \mathbb{R} \text{ constant.}$$

Solution : Ici $a = c, b = 1$ (car t joue le rôle de y), $c = 0$. Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

On choisit le paramètre s de sorte que sur la courbe initiale ($t = 0$) on ait $s = 0$ et $x = \tau, u = f(\tau)$. La résolution donne :

$$x(s) = cs + \tau, \quad t(s) = s, \quad u(s) = f(\tau).$$

En éliminant $s = t$ et $\tau = x - ct$, on obtient la solution explicite :

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Exercice 52 (Équation de Burgers (cas non visqueux)). *Considérons l'équation quasi-linéaire*

$$u_t + u u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Solution 52. Ici $a = u, b = 1, c = 0$. Les caractéristiques vérifient

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Avec la condition initiale $t = 0, x = \tau, u = f(\tau)$, on trouve

$$u(s) = f(\tau), \quad t(s) = s, \quad x(s) = f(\tau)s + \tau.$$

En éliminant $s = t$ et τ , on obtient la relation implicite

$$u = f(x - ut).$$

Cette formule définit $u(x, t)$ tant que les caractéristiques ne se croisent pas (avant la formation d'un choc).

Exercice 53 (EDP linéaire à coefficients variables). Soit l'équation

$$x u_x + y u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Solution 53. On cherche u vérifiant cette équation. Ici $a = x$, $b = y$, $c = 0$. Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dy}{ds} = y, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

On paramètre par s et on résout :

$$x(s) = x_0 e^s, \quad y(s) = y_0 e^s, \quad u(s) = u_0.$$

Le long d'une caractéristique, u est constant et le rapport y/x reste constant (car $y/x = y_0/x_0$). Ainsi u ne dépend que de y/x ; on peut écrire

$$u(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ou} \quad u(x, y) = G\left(\frac{x}{y}\right),$$

pour une fonction arbitraire F ou G (définie pour $x > 0$ ou $y > 0$ selon le domaine).

Remarque 3.4.1. Dans le cas d'une condition initiale, par exemple $u(x, 1) = g(x)$ pour $x > 0$, on détermine la fonction inconnue F en écrivant $u(x, 1) = F(1/x) = g(x)$, d'où $F(t) = g(1/t)$, et finalement $u(x, y) = g(y/x)$.

b- Séparation des variables La méthode de séparation des variables est utilisée pour les EDP linéaires sur des domaines bornés avec des conditions aux limites homogènes. On cherche une solution sous la forme d'un produit de fonctions chacune dépendant d'une seule variable [citation :1][citation :6].

Par exemple, pour l'équation de la chaleur $u_t = k u_{xx}$ sur $[0, L]$ avec conditions aux limites $u(0, t) = u(L, t) = 0$, on pose $u(x, t) = X(x)T(t)$. En substituant, on obtient :

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

où λ est une constante de séparation. On résout alors deux EDO :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + k\lambda T = 0$$

avec les conditions aux limites $X(0) = X(L) = 0$, ce qui conduit à un problème de Sturm-Liouville et à des valeurs propres $\lambda_n = (n\pi/L)^2$.

Exemple 44 (Équation de transport linéaire homogène). Considérons l'équation

$$u_x + u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution : On pose $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Alors $u_x = X'(x)Y(y)$ et $u_y = X(x)Y'(y)$. L'équation devient

$$X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 0.$$

En divisant par $X(x)Y(y)$ (supposé non nul), on obtient

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0 \implies \frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)}.$$

Le membre gauche ne dépend que de x , le droit que de y . Ils sont donc égaux à une constante k :

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = k, \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -k.$$

Les solutions sont

$$X(x) = Ae^{kx}, \quad Y(y) = Be^{-ky},$$

d'où

$$u_k(x, y) = C_k e^{k(x-y)}, \quad C_k = AB.$$

Par linéarité de l'équation, toute superposition (somme discrète ou intégrale) de telles solutions reste solution. En particulier, si on pose k réel quelconque, on peut représenter toute fonction de $(x - y)$ par une transformée de Fourier. Ainsi la solution générale s'écrit

$$u(x, y) = f(x - y),$$

où f est une fonction arbitraire (suffisamment régulière).

Exercice 54 (EDP à coefficients variables : $xu_x + yu_y = 0$).

Solution 54. On considère l'équation

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Avec $u(x, y) = X(x)Y(y)$, on a

$$xX'(x)Y(y) + yX(x)Y'(y) = 0.$$

En divisant par $X(x)Y(y)$ (pour $x, y \neq 0$), il vient

$$x \frac{X'(x)}{X(x)} + y \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0.$$

On sépare les variables :

$$x \frac{X'(x)}{X(x)} = -y \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda \quad (\text{constante}).$$

On obtient deux EDO :

$$x \frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \implies \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{\lambda}{x} \implies \ln |X(x)| = \lambda \ln |x| + \text{cste} \implies X(x) = Ax^\lambda,$$

$$y \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda \implies \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\frac{\lambda}{y} \implies Y(y) = By^{-\lambda}.$$

Ainsi

$$u_\lambda(x, y) = C_\lambda x^\lambda y^{-\lambda} = C_\lambda \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda.$$

Par superposition (par exemple sur λ réel), on obtient la solution générale

$$u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right),$$

où F est une fonction arbitraire. On retrouve bien le résultat classique : les solutions sont constantes le long des droites x/y constant.

Exercice 55 (Équation avec amortissement : $u_t + cu_x + \alpha u = 0$).

Solution 55. Soit l'équation

$$u_t + cu_x + \alpha u = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

où c et α sont des constantes réelles. On cherche des solutions séparées $u(x, t) = X(x)T(t)$. En substituant :

$$X(x)T'(t) + cX'(x)T(t) + \alpha X(x)T(t) = 0.$$

Divisons par $X(x)T(t)$ (pour $X, T \neq 0$) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + c \frac{X'(x)}{X(x)} + \alpha = 0.$$

Posons $\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu$ (constante). Alors

$$c \frac{X'(x)}{X(x)} + \alpha + \mu = 0 \implies \frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{\alpha + \mu}{c}.$$

On note $-\frac{\alpha + \mu}{c} = \nu$. Ainsi

$$\begin{aligned} T'(t) = \mu T(t) &\implies T(t) = Ae^{\mu t}, \\ X'(x) = \nu X(x) &\implies X(x) = Be^{\nu x}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_{\mu, \nu}(x, t) = Ce^{\mu t + \nu x}, \quad \text{avec } \nu = -\frac{\alpha + \mu}{c}.$$

En posant $\mu = -c\lambda$ (par exemple), on obtient $\nu = \lambda$, et $u = Ce^{\lambda(x-ct) - \alpha t}$. La solution générale s'obtient par superposition :

$$u(x, t) = e^{-\alpha t} f(x - ct),$$

ce qui correspond à la solution connue par la méthode des caractéristiques (facteur d'atténuation exponentiel).

Remarque 3.4.2. Dans ces exemples, la séparation des variables fournit une famille de solutions exponentielles ou puissances. La solution générale est obtenue en combinant ces solutions, souvent sous la forme d'une fonction arbitraire d'une combinaison linéaire des variables. La méthode des caractéristiques donne directement cette forme, mais la séparation des variables illustre la structure produit et l'importance des constantes de séparation.

3.4.4 Équations classiques de la physique mathématique

a- Équation de transport

$$u_t + cu_x = 0$$

La solution est $u(x, t) = f(x - ct)$, où f est la condition initiale. L'équation modélise le transport d'une quantité sans déformation [citation :7].

b- Équation de la chaleur (diffusion)

$$u_t = k\Delta u$$

En 1D : $u_t = ku_{xx}$. Elle modélise la diffusion de la chaleur ou d'une concentration. La solution a tendance à devenir régulière et à s'étaler avec le temps [citation :1][citation :6][citation :7].

c- Équation des ondes

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

En 1D : $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Elle modélise la propagation des ondes (sonores, vibratoires). La solution de d'Alembert sur la droite réelle est $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$

d- Équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

Les solutions sont appelées **fonctions harmoniques**. Elles apparaissent dans les problèmes stationnaires (équilibre)

3.5 Fonctions Spéciales

Les fonctions spéciales forment une classe de fonctions qui apparaissent fréquemment comme solutions d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles issues de problèmes de la physique mathématique, de la théorie des probabilités, ou de l'analyse complexe. Leur étude systématique remonte au **XIXe siècle** et elles possèdent des propriétés remarquables : représentations intégrales, relations de récurrence, fonctions génératrices, orthogonalité, etc. Ce document présente les plus importantes d'entre elles.

3.5.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition et propriétés fondamentales

Définition 3.5.1 (Fonction Gamma). Pour $x > 0$, la fonction Gamma est définie par l'intégrale convergente :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Par prolongement analytique, elle s'étend à tout $x \in \mathbb{C}$ sauf les pôles simples en $x = 0, -1, -2, \dots$

Théorème 3.5.1 (Propriétés élémentaires).

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. Relation fonctionnelle : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Valeurs particulières : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
5. Formule de Stirling : $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Théorème 3.5.2 (Représentations intégrales et produit).

1. Formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

2. Formule des compléments :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

Exemple 45. Calculer $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Solution : On utilise la relation fonctionnelle :

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 56. Démontrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

en utilisant la fonction Gamma.

Solution 56. Posons $u = t^2$, soit $t = u^{1/2}$, $dt = \frac{1}{2}u^{-1/2}du$. Alors :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.5.2 Fonction Beta

Définition 3.5.2. Pour $x > 0$, $y > 0$, la fonction Beta est définie par :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Théorème 3.5.3 (Lien avec Gamma).

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exemple 46. Calculer $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Solution : D'après le lien avec Gamma :

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

On peut aussi le vérifier par le changement de variable $t = \sin^2 \theta$ dans l'intégrale.

Exercice 57. Exprimer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$$

à l'aide de la fonction Beta.

Solution 57. Posons $t = \sin^2 \theta$, alors

$$dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad \text{et} \quad \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3.5.3 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel apparaissent comme solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

où ν est un paramètre réel ou complexe.

a- Fonctions de Bessel de première espèce

Définition 3.5.3. La fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν est définie par la série entière :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Théorème 3.5.4 (Propriétés).

1. Relations de récurrence :

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

2. $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$

3. $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$

4. Fonction génératrice :

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

b- Fonctions de Bessel de seconde espèce

Définition 3.5.4. La fonction de Bessel de seconde espèce (ou fonction de Neumann) est définie pour $\nu \notin \mathbb{Z}$ par :

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

et pour ν entier par prolongement.

Exemple 47. Montrer que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Solution : On utilise la série avec $\nu = 1/2$.

Rappelons que

$$\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}.$$

Alors :

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + 3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2k}.$$

En remplaçant et simplifiant, on obtient :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Exercice 58. Établir la relation

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x).$$

Solution 58. On utilise la relation

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x).$$

En effet, de

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = J_1(x) + x J_1'(x),$$

et avec la relation de récurrence

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x),$$

on obtient le résultat. Par intégration de 0 à x , on a :

$$\int_0^x t J_0(t) dt = [t J_1(t)]_0^x = x J_1(x),$$

car $t J_1(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.

3.6 Exercices corrigés

3.6.1 Équations différentielles ordinaires

Exercice 59 (Équation à variables séparables). Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Solution 59. L'équation est à variables séparables. On écrit :

$$y dy = x dx.$$

Intégrons :

$$\int y dy = \int x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

D'où $y^2 = x^2 + 2C$. La condition initiale donne $2^2 = 0 + 2C$, soit $C = 2$. Ainsi :

$$y^2 = x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + 4} \quad (\text{car } y(0) = 2 > 0).$$

La solution est donc $y(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Exercice 60 (Équation linéaire du premier ordre). *Résoudre :*

$$y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1.$$

Solution 60. *C'est une équation linéaire avec $a(x) = 2x$ et $b(x) = x$. Le facteur intégrant est :*

$$\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}.$$

Multiplions l'équation par $\mu(x)$:

$$e^{x^2} y' + 2xe^{x^2} y = xe^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx} (e^{x^2} y) = xe^{x^2}.$$

Intégrons :

$$e^{x^2} y = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Donc $y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$. Avec $y(0) = 1$: $1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. La solution est :

$$y(x) = \frac{1}{2} (1 + e^{-x^2}).$$

Exercice 61 (Équation de Bernoulli). *Résoudre :*

$$y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Solution 61. *C'est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On pose $z = y^{1-n} = y^{-1}$. Alors*

$$z' = -y^{-2} y'.$$

En divisant l'équation par y^2 :

$$y^{-2} y' - y^{-1} = x \Rightarrow -z' - z = x \Rightarrow z' + z = -x.$$

C'est une équation linéaire en z . Facteur intégrant $\mu(x) = e^x$:

$$\frac{d}{dx} (e^x z) = -xe^x.$$

Intégrons par parties : $\int -xe^x dx = -xe^x + e^x + C$. Ainsi :

$$e^x z = -xe^x + e^x + C \Rightarrow z = -x + 1 + Ce^{-x}.$$

Revenant à $y = 1/z$: $y = \frac{1}{1-x + Ce^{-x}}$. Condition initiale $y(0) = 1$ donne $1 = \frac{1}{1+C}$ donc $C = 0$. Finalement :

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x < 1).$$

Exercice 62 (Équation linéaire du second ordre à coefficients constants). *Résoudre le problème de Cauchy :*

$$y'' - 3y' + 2y = 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solution 62. *L'équation homogène associée est*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

de racines $r_1 = 1, r_2 = 2$. Donc la solution homogène est :

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Recherchons une solution particulière de l'équation complète avec second membre polynomial $4x$.
On la cherche sous la forme $y_p = Ax + B$ (car 0 n'est pas racine). En substituant :

$$y'_p = A, \quad y''_p = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 3A + 2(Ax + B) = 2Ax + (2B - 3A) = 4x.$$

Par identification :

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2; \quad 2B - 3A = 0 \Rightarrow 2B - 6 = 0 \Rightarrow B = 3.$$

Ainsi

$$y_p = 2x + 3.$$

La solution générale est

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 3.$$

Utilisons les conditions initiales :

$$y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2.$$

$$y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 2 \Rightarrow y'(0) = C_1 + 2C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = -2.$$

Soustrayons les deux équations :

$$(C_1 + 2C_2) - (C_1 + C_2) = -2 - (-2) \Rightarrow C_2 = 0, \text{ et } C_1 = -2$$

Alors .La solution est donc :

$$y(x) = -2e^x + 2x + 3.$$

a- Équations différentielles du premier ordre

Exercice 63 (Variables séparables). Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}, \quad y(1) = 2.$$

Solution 63. L'équation est à variables séparables. On réécrit :

$$y^2 dy = x^2 dx.$$

Intégrons chaque membre :

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Posons $K = 3C$, alors $y^3 = x^3 + K$. La condition initiale $y(1) = 2$ donne $8 = 1 + K$, soit $K = 7$.

Ainsi,

$$y^3 = x^3 + 7.$$

La solution est donc :

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7}.$$

Exercice 64 (Équation linéaire). Résoudre le problème de Cauchy :

$$y' + y \tan x = \sin 2x, \quad y(0) = 1.$$

Solution 64. C'est une équation linéaire de la forme

$$y' + a(x)y = b(x) \quad \text{avec} \quad a(x) = \tan x \quad \text{et} \quad b(x) = \sin 2x.$$

Le facteur intégrant est :

$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln |\cos x|} = \frac{1}{\cos x} \quad (\text{en prenant } \cos x > 0).$$

Multiplions l'équation par $\mu(x)$:

$$\frac{1}{\cos x}y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y = \frac{\sin 2x}{\cos x}.$$

Le membre de gauche est la dérivée de $\frac{y}{\cos x}$ car

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\cos x} \right) = \frac{y' \cos x + y \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y.$$

Donc :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\cos x} \right) = \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x.$$

Intégrons :

$$\frac{y}{\cos x} = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C.$$

Ainsi $y(x) = -2 \cos^2 x + C \cos x$. La condition initiale $y(0) = 1$ donne $1 = -2 + C$, donc $C = 3$. La solution est :

$$y(x) = -2 \cos^2 x + 3 \cos x.$$

Exercice 65 (Équation exacte). Résoudre l'équation différentielle :

$$(2xy + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0.$$

Solution 65. Vérifions d'abord si l'équation est exacte. On a

$$M(x, y) = 2xy + 1 \quad \text{et} \quad N(x, y) = x^2 + 1.$$

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Elles sont égales, donc l'équation est exacte. Il existe une fonction $F(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Intégrons $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 1$ par rapport à x :

$$F(x, y) = \int (2xy + 1)dx = x^2y + x + \phi(y).$$

Dérivons par rapport à y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \phi'(y).$$

Ceci doit être égal à

$$N = x^2 + 1,$$

donc $\phi'(y) = 1$, d'où $\phi(y) = y + C_0$. Ainsi,

$$F(x, y) = x^2y + x + y + C_0.$$

La solution générale de l'équation exacte est $F(x, y) = C$, soit :

$$x^2y + x + y = C \quad \Rightarrow \quad y(x^2 + 1) + x = C.$$

On peut aussi écrire

$$y = \frac{C - x}{x^2 + 1}.$$

Exercice 66 (Équation de Bernoulli). Résoudre :

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^2.$$

Solution 66. C'est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On pose $z = y^{1-n} = y^{-1}$. Alors

$$z' = -y^{-2}y'.$$

Divisons l'équation par y^2 :

$$y^{-2}y' + \frac{2}{x}y^{-1} = x^2 \Rightarrow -z' + \frac{2}{x}z = x^2.$$

On trouve

$$z' - \frac{2}{x}z = -x^2.$$

C'est une équation linéaire en z . Le facteur intégrant est $\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$. Multiplions :

$$x^{-2}z' - 2x^{-3}z = -1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-2}z) = -1.$$

Intégrons : $x^{-2}z = -x + C$, donc $z = -x^3 + Cx^2$. Revenant à $y = 1/z$:

La solution générale est donc

$$y(x) = \frac{1}{Cx^2 - x^3} = \frac{1}{x^2(C - x)}.$$

Exercice 67 (Équation de Riccati). Soit l'équation de Riccati :

$$y' = x^2 + y^2,$$

dont on connaît une solution particulière $y_1(x) = -\frac{1}{x}$. Résoudre l'équation.

Solution 67. On pose $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Alors

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}.$$

En substituant dans l'équation :

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = x^2 + \left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 = x^2 + y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Mais y_1 est solution particulière, donc $y_1' = x^2 + y_1^2$. En simplifiant, on obtient :

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Multiplions par $-z^2$:

$$z' = -2y_1z - 1.$$

Remplaçons $y_1 = -\frac{1}{x}$:

$$z' = -2\left(-\frac{1}{x}\right)z - 1 = \frac{2}{x}z - 1.$$

C'est une équation linéaire : $z' - \frac{2}{x}z = -1$. Facteur intégrant $\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = x^{-2}$. Alors :

$$x^{-2}z' - 2x^{-3}z = -x^{-2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-2}z) = -x^{-2}.$$

Intégrons : $x^{-2}z = \frac{1}{x} + C$, donc $z = x + Cx^2$. Ainsi,

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x + Cx^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(1 + Cx)}.$$

La solution générale est :

$$y(x) = \frac{-(1 + Cx) + 1}{x(1 + Cx)} = \frac{-Cx}{x(1 + Cx)} = -\frac{C}{1 + Cx}.$$

Notons que la solution particulière correspond au cas $C = 0$.

b- Équations linéaires du second ordre

Exercice 68 (Coefficients constants homogène). Résoudre l'équation :

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Solution 68. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 16 - 52 = -36$. Les racines sont complexes conjuguées :

$$r = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

La solution générale est donc :

$$y(x) = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Exercice 69 (Méthode des coefficients indéterminés). Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'' + y = 2e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solution 69. L'équation homogène associée est

$$y'' + y = 0$$

de solution $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Le second membre $2e^x$ n'est pas solution de l'homogène, on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p = Ae^x.$$

En substituant : $y''_p = Ae^x$, donc

$$Ae^x + Ae^x = 2Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 1.$$

Ainsi $y_p = e^x$.

La solution générale est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x.$$

Conditions initiales :

$$y(0) = C_1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1,$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x \Rightarrow y'(0) = C_2 + 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Donc la solution générale est donnée par

$$y(x) = -\cos x + e^x.$$

Exercice 70 (Variation des paramètres). Résoudre l'équation :

$$y'' + y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Solution 70. L'équation homogène $y'' + y = 0$ a pour solutions $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$. Le wronskien est

$$W = \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Une solution particulière par la méthode de variation des paramètres est donnée par :

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 g}{W} dx,$$

avec $g(x) = \tan x$. Ainsi :

$$y_p = -\cos x \int \sin x \tan x dx + \sin x \int \cos x \tan x dx.$$

Calculons les deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int \sin x \tan x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= \int (\sec x - \cos x) dx = \ln |\sec x + \tan x| - \sin x + C_1. \end{aligned}$$

et

$$\int \cos x \tan x dx = \int \sin x dx = -\cos x + C_2.$$

Prenons les constantes nulles pour une particulière. Alors :

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos x (\ln |\sec x + \tan x| - \sin x) + \sin x (-\cos x) \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \tan x| + \cos x \sin x - \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Les termes $\cos x \sin x$ s'annulent, donc :

$$y_p = -\cos x \ln |\sec x + \tan x|.$$

La solution générale est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|.$$

Exercice 71 (Équation d'Euler-Cauchy). Résoudre l'équation :

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Solution 71. C'est une équation d'Euler-Cauchy. On cherche des solutions de la forme

$$y = x^r.$$

Alors

$$y' = r x^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Substituons :

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} - 2x \cdot r x^{r-1} + 2x^r = 0 \quad \Rightarrow \quad x^r [r(r-1) - 2r + 2] = 0.$$

L'équation indiciale est

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

soit l'équation caractéristique

$$(r-1)(r-2) = 0, \quad \text{ses racines sont } r = 1 \quad \text{et} \quad r = 2.$$

La solution générale est donc :

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2.$$

c- Systèmes différentiels linéaires

Exercice 72 (Système 2x2 à coefficients constants). Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Solution 72. Écrivons le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2$$

Une seule valeur propre $\lambda = -1$ double. Cherchons un vecteur propre : $(A + I)v = 0$ donne

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Une équation :

$$2v_1 - v_2 = 0,$$

donc $v_2 = 2v_1$. Un vecteur propre est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il manque un second vecteur indépendant pour former une base de solutions. On cherche un vecteur généralisé w tel que $(A + I)w = v$.

Soit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La première ligne donne $2w_1 - w_2 = 1$, la seconde $4w_1 - 2w_2 = 2$ (identique). On peut prendre $w_1 = 0$, alors $w_2 = -1$ donne $0 - (-1) = 1$ ok. Donc $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La solution générale est :

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-t} v + C_2 e^{-t} (tv + w) = e^{-t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right].$$

Soit :

$$x(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t), \quad y(t) = e^{-t}(2C_1 + 2C_2 t - C_2).$$

Conditions initiales : $x(0) = C_1 = 1, \quad y(0) = 2C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow 2 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2$. Donc :

$$x(t) = e^{-t}(1 + 2t), \quad y(t) = e^{-t}(2 + 4t - 2) = e^{-t}(4t).$$

Exercice 73 (Système avec second membre). Résoudre le système inhomogène :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t}, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases}$$

en utilisant la méthode de variation des paramètres.

Solution 73. On commence par résoudre le système homogène associé :

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 5). \quad \text{Donc} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$

Pour $\lambda = 1 : (A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a + b = 0$, soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 5 : (A - 5I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3a + b = 0$, soit $b = 3a$, donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La solution homogène générale est :

$$\mathbf{X}_h(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une solution particulière du système non homogène, on utilise la variation des paramètres. On cherche

$$\mathbf{X}_p(t) = C_1(t)e^t v_1 + C_2(t)e^{5t} v_2.$$

La matrice fondamentale

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

On doit résoudre

$$\Phi(t)C'(t) = \mathbf{b}(t) \quad \text{où} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résolvons le système linéaire. De la deuxième équation :

$$-e^t C'_1 + 3e^{5t} C'_2 = 0 \Rightarrow C'_1 = 3e^{4t} C'_2.$$

Substituons dans la première :

$$e^t (3e^{4t} C'_2) + e^{5t} C'_2 = e^{2t} \Rightarrow 3e^{5t} C'_2 + e^{5t} C'_2 = 4e^{5t} C'_2 = e^{2t} \Rightarrow C'_2 = \frac{e^{2t}}{4e^{5t}} = \frac{1}{4} e^{-3t}.$$

Alors

$$C'_1 = 3e^{4t} \cdot \frac{1}{4} e^{-3t} = \frac{3}{4} e^t.$$

Intégrons :

$$C_2(t) = \int \frac{1}{4} e^{-3t} dt = -\frac{1}{12} e^{-3t} + k_2,$$

$$C_1(t) = \int \frac{3}{4} e^t dt = \frac{3}{4} e^t + k_1.$$

Prenons $k_1 = k_2 = 0$ pour une particulière. Alors :

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} e^t \\ -\frac{1}{12} e^{-3t} \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} e^{-3t} \\ \frac{3}{4} e^t \end{pmatrix} e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\mathbf{X}_p(t) = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 9/12 \\ -9/12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/12 \\ 3/12 \end{pmatrix} \right] = e^{2t} \begin{pmatrix} 8/12 \\ -12/12 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La solution générale est

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{X}_h(t) + \mathbf{X}_p(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) + x_p(t) \\ y_h(t) + y_p(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{5t} + \frac{2}{3} e^{2t} \\ -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} - e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d- Applications

Exercice 74 (Circuit RLC). Un circuit RLC série est gouverné par l'équation :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

où $q(t)$ est la charge. On donne :

$$L = 1H, R = 2\Omega, C = 1F, \text{ et } E(t) = 10 \cos t.$$

Déterminer $q(t)$ avec les conditions initiales $q(0) = 0, i(0) = q'(0) = 0$.

Solution 74. L'équation devient :

$$q'' + 2q' + q = 10 \cos t.$$

L'équation homogène a pour équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0,$$

, racine double $r = -1$. Donc

$$q_h = (C_1 + C_2t)e^{-t}.$$

Pour la solution particulière, le second membre est $10 \cos t$. On cherche une solution de la forme

$$q_p = A \cos t + B \sin t.$$

Substituons on trouve :

$$q_p' = -A \sin t + B \cos t, \quad q_p'' = -A \cos t - B \sin t.$$

Alors

$$\begin{aligned} q_p'' + 2q_p' + q_p &= (-A \cos t - B \sin t) + 2(-A \sin t + B \cos t) + (A \cos t + B \sin t) \\ &= [(-A + 2B + A) \cos t] + [(-B - 2A + B) \sin t] \\ &= (2B \cos t) + (-2A \sin t). \end{aligned}$$

On veut $2B \cos t - 2A \sin t = 10 \cos t$. Par identification :

$$2B = 10 \Rightarrow B = 5, \quad -2A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Donc $q_p = 5 \sin t$.

Solution générale :

$$q(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + 5 \sin t.$$

Conditions initiales : $q(0) = C_1 = 0$. Alors

$$q(t) = C_2te^{-t} + 5 \sin t.$$

Dérivons :

$$q'(t) = C_2e^{-t} - C_2te^{-t} + 5 \cos t = C_2e^{-t}(1 - t) + 5 \cos t.$$

Qui donne

$$q'(0) = C_2 + 5 = 0 \Rightarrow C_2 = -5.$$

Ainsi, la charge cherchée est

$$q(t) = -5te^{-t} + 5 \sin t = 5(\sin t - te^{-t}).$$

Exercice 75 (Mécanique : oscillateur amorti). Un oscillateur harmonique amorti est décrit par

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad \text{Pour : } m = 1, c = 2, k = 5, \text{ et } x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

Déterminer $x(t)$.

Solution 75. L'équation est

$$x'' + 2x' + 5x = 0.$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 5 = 0, \quad \text{donne les racines } r = -1 \pm 2i.$$

La solution générale est :

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Conditions initiales : $x(0) = C_1 = 1$. Dérivons :

$$x'(t) = e^{-t}[-(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + (-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t)].$$

$$\text{À } t = 0 : x'(0) = -C_1 + 2C_2 = -1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$x(t) = e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$

3.6.2 Équations aux Dérivées Partielles

Exercice 76 (Équation de transport). Résoudre le problème de Cauchy suivant pour l'équation de transport :

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solution 76. La méthode des caractéristiques est bien adaptée. Les courbes caractéristiques sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{du}{dt} = 0$$

En paramétrant par t (avec $s = t$), on a le système :

$$\frac{dx}{dt} = 2 \implies x(t) = 2t + x_0$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \implies u(t) = \text{constante} = u(x_0, 0)$$

Le long de chaque caractéristique, u est constant et égal à sa valeur initiale. Puisque $x_0 = x - 2t$, on obtient :

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \frac{1}{1+(x-2t)^2}$$

Vérification :

$$u_t = \frac{4(x-2t)}{(1+(x-2t)^2)^2}, \quad u_x = \frac{-2(x-2t)}{(1+(x-2t)^2)^2},$$

donc

$$u_t + 2u_x = 0.$$

La condition initiale est satisfaite car

$$u(x, 0) = 1/(1+x^2).$$

Exercice 77 (Équation de la chaleur par séparation des variables). Résoudre l'équation de la chaleur sur un intervalle avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solution 77. On applique la méthode de séparation des variables. En cherchant des solutions de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

on obtient le problème de **Sturm-Liouville** :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_n = n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, avec les fonctions propres associées $X_n(x) = \sin(nx)$.

L'équation pour T est

$$T' + \lambda_n T = 0, \quad \text{donc} \quad T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}.$$

Par superposition, la solution générale est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

La condition initiale donne :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$$

Par identification des coefficients de la série de Fourier en sinus (unicité du développement), on a :

$$C_1 = 1, \quad C_3 = -\frac{1}{3}, \quad C_n = 0 \text{ pour } n \neq 1, 3$$

Ainsi, la solution exacte est :

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x - \frac{1}{3} e^{-9t} \sin 3x$$

Exercice 78 (Équation de Laplace sur un disque). Résoudre l'équation de Laplace sur le disque unité avec condition au bord :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \theta \in [0, 2\pi] \\ u(1, \theta) = \cos^2 \theta \end{cases}$$

Solution 78. En coordonnées polaires (r, θ) , l'équation de Laplace s'écrit :

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

On cherche une solution par séparation des variables $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. On obtient deux EDO :

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

La périodicité en θ impose $\lambda_n = n^2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, avec $\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$.

L'équation pour R est de type Euler-Cauchy, avec solutions $R_n(r) = r^n$ et r^{-n} .

La solution doit être bornée en $r = 0$, donc on garde $R_n(r) = r^n$.

La solution générale est :

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

La condition au bord $r = 1$ donne :

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Par identification des coefficients de Fourier, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2} \implies a_0 = 1 \\ a_1 &= 0, \quad b_1 = 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2}, \quad b_2 = 0 \\ a_n &= 0 \text{ pour } n \geq 3, \quad b_n = 0 \text{ pour tous } n\end{aligned}$$

Ainsi, la solution est :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2 \cos(2\theta)$$

On peut vérifier que cette fonction satisfait bien l'équation de Laplace et la condition au bord.

Exercice 79 (Équation de transport). Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$, où f est une fonction donnée.

Solution 79. L'équation est linéaire à coefficients constants. Les courbes caractéristiques sont données par

$$\frac{dx}{dt} = c,$$

soit $x(t) = ct + x_0$, le long de ces courbes.

u est constant car

$$\frac{du}{dt} = \partial_t u + \partial_x u \frac{dx}{dt} = u_t + cu_x = 0.$$

Ainsi,

$$u(x, t) = f(x_0) = f(x - ct).$$

La solution est donc

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Exercice 80 (Équation linéaire à coefficients variables). Résoudre l'équation :

$$\partial_x u + x \partial_y u = 0, \quad u(0, y) = \sin y.$$

Solution 80. On utilise la méthode des caractéristiques. Les courbes caractéristiques vérifient :

$$\frac{dy}{dx} = x \implies y = \frac{x^2}{2} + C.$$

La constante C est déterminée par la condition initiale. Le long d'une caractéristique, u est constant.

Pour $x = 0$, on a

$$y = C.$$

Donc

$$u(x, y) = u(0, C) = \sin C = \sin \left(y - \frac{x^2}{2} \right).$$

Ainsi, la solution est

$$u(x, y) = \sin \left(y - \frac{x^2}{2} \right).$$

Exercice 81 (Problème de Dirichlet sur un rectangle). Résoudre l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ sur le rectangle $0 < x < a, 0 < y < b$ avec conditions aux limites :

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, b) = f(x).$$

Solution 81. On cherche des solutions par séparation de variables

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

L'équation donne

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda. \quad \text{Avec } X(0) = X(a) = 0,$$

on obtient

$$\lambda_n = (n\pi/a)^2 \quad \text{et} \quad X_n(x) = \sin(n\pi x/a).$$

L'équation pour Y devient

$$Y'' - \lambda_n Y = 0 \quad \text{avec } Y(0) = 0,$$

d'où

$$Y_n(y) = \sinh(n\pi y/a).$$

La solution générale est

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi y/a) \sin(n\pi x/a).$$

La condition en $y = b$ donne

$$f(x) = \sum C_n \sinh(n\pi b/a) \sin(n\pi x/a).$$

Donc $C_n \sinh(n\pi b/a)$ sont les coefficients de Fourier de f :

$$C_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin(n\pi x/a) dx.$$

Exercice 82 (Disque et coordonnées polaires). Résoudre l'équation de Laplace sur le disque unité $r < 1$ avec condition au bord $u(1, \theta) = f(\theta)$.

Solution 82. En coordonnées polaires, l'équation s'écrit

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

On sépare $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. On obtient

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \quad \text{et} \quad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

La périodicité en θ impose $\lambda_n = n^2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Les solutions en r sont r^n et r^{-n} ; on garde r^n pour la régularité en 0. La solution générale est

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

La condition au bord donne

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

donc a_n, b_n sont les coefficients de Fourier de f .

Exercice 83 (Équation de la chaleur avec second membre périodique). Résoudre

$$u_t = u_{xx} + \cos x,$$

avec $u(x, 0) = 0$ et u périodique en x de période 2π .

Solution 83. On cherche une solution particulière indépendante du temps sous la forme

$$v(x) = A \cos x.$$

En substituant, on a

$$0 = -A \cos x + \cos x \Rightarrow A = 1$$

. Donc

$$v(x) = \cos x \quad \text{est une solution stationnaire.}$$

On pose $w = u - v$, alors w satisfait $w_t = w_{xx}$ avec $w(x, 0) = -\cos x$.

La solution de ce problème est donnée par la série de Fourier :

$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

avec c_n les coefficients de Fourier de $-\cos x$.

Comme

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,$$

on a $c_1 = -1/2$, $c_{-1} = -1/2$, les autres nuls. Donc

$$w(x, t) = -\frac{1}{2} e^{-t} e^{ix} - \frac{1}{2} e^{-t} e^{-ix} = -e^{-t} \cos x.$$

Finalement la solution est :

$$u(x, t) = \cos x - e^{-t} \cos x = (1 - e^{-t}) \cos x.$$

Exercice 84 (Séparation des variables sur un intervalle borné). Résoudre l'équation de la chaleur sur $[0, L]$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$u_t = k u_{xx}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Solution 84. On cherche des solutions de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

La séparation donne

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{avec} \quad X(0) = X(L) = 0 \quad \text{et} \quad T' + k\lambda T = 0.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2$$

et les fonctions propres

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L).$$

Alors $T_n(t) = C_n e^{-k\lambda_n t}$. Par superposition,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L).$$

Les coefficients sont donnés par la série de Fourier de f :

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

3.6.3 Fonctions Spéciales

a- Fonction Gamma et Beta

Exercice 85 (Valeur de la fonction Gamma). Calculer $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ et $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solution 85. On utilise la relation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

— Pour $\frac{7}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

— Pour $-\frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 86. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 2\pi$.

Solution 86. Utilisons la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Pour $z = \frac{1}{6}$, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/6)} = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi.$$

Exercice 87 (Intégrale de Wallis). Exprimer l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$$

à l'aide de la fonction Beta.

Solution 87. On a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Exercice 88 (Dérivée logarithmique de Gamma). La fonction digamma

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$$

Montrer que

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Solution 88. En dérivant la relation

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

on obtient

$$\Gamma'(z+1) = \Gamma(z) + z\Gamma'(z).$$

Divisant par $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on a

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

soit

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

b- Fonctions de Bessel

Exercice 89 (Fonction de Bessel). Montrer que

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

Solution 89. On utilise la relation de récurrence

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x)$$

ou mieux, la formule explicite pour les demi-entiers. On sait que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{et} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

La relation $J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)$ donne pour $\nu = 1/2$:

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

Exercice 90. En utilisant la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'ordre entier, montrer que

$$J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2 = 1.$$

Solution 90. La fonction génératrice est

$$e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

En posant $t = e^{i\theta}$, on a

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta}.$$

En prenant le module au carré et en intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{ix \sin \theta}|^2 d\theta = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m,n} J_m(x)J_n(x)e^{i(m-n)\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)^2.$$

Comme $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)^2 = J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2. \quad \text{D'où l'identité.}$$

Exercice 91. Démontrer que

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Solution 91. Partons de la fonction génératrice avec

$$t = e^{i\theta} : \quad e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta}.$$

La partie réelle donne

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

Prenons plutôt la partie imaginaire.

En intégrant sur θ de 0 à π , les termes en $e^{in\theta}$ pour $n \neq 0$ s'annulent car $\int_0^\pi e^{in\theta} d\theta = 0$ pour n pair ? En fait, $\int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = 0$ pour $n \neq 0$. Donc

$$\int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta = \pi J_0(x). \quad \text{D'où le résultat.}$$

Séries, Séries de Fourier

4.1 Séries numériques, Suites et séries de fonctions, Séries entières

Ce chapitre propose un résumé des concepts fondamentaux sur les séries numériques, les suites et séries de fonctions, séries entières ainsi que les séries de Fourier. Il inclut les définitions essentielles, les théorèmes de convergence et les critères pratiques, accompagnés d'exercices détaillés avec solutions.

4.2 Séries numériques

4.2.1 Généralités

Définition 4.2.1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général a_n la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$. On note $\sum a_n$. La série est dite convergente si la suite (S_N) converge ; sa limite est alors notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dans le cas contraire, la série est divergente.

Théorème 4.2.1 (Condition nécessaire de convergence). Si la série $\sum a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. La réciproque est fautive (exemple : série harmonique).

4.2.2 Séries à termes positifs

Pour les séries à termes positifs, plusieurs critères de convergence existent.

Théorème 4.2.2 (Critère de comparaison). Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n assez grand, alors :

- La convergence de $\sum b_n$ implique celle de $\sum a_n$.
- La divergence de $\sum a_n$ implique celle de $\sum b_n$.

Théorème 4.2.3 (Critère de d'Alembert (règle du quotient)). Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, alors :

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 4.2.4 (Critère de Cauchy (règle de la racine)). Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, alors :

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.

— Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorem 4.2.5 (Critère de Riemann). La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Définition 4.2.2. Les séries de **Bertrand** sont les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

où α et β sont des réels.

Théorem 4.2.6 (Critère de Bertrand). La série de **Bertrand** : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

4.2.3 Séries alternées

Théorem 4.2.7 (Critère de Leibniz). Soit (a_n) une suite positive, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus, si S est sa somme et S_N la somme partielle, on a $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.

4.2.4 Convergence absolue

Définition 4.2.3. La série $\sum a_n$ est dite absolument convergente si $\sum |a_n|$ converge. Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fautive (exemple : série harmonique alternée).

Exemple 48. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

selon les valeurs de $k \in \mathbb{R}$.

Solution : On utilise le critère de condensation de Cauchy (ou une comparaison avec une intégrale). La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^k}$$

est positive et décroissante pour x assez grand. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_2^{\infty} f(x) dx$ converge. Calculons :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \left[\frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} \right]_2^{\infty} \text{ si } k \neq 1.$$

Cette intégrale converge si $1 - k < 0$ i.e. $k > 1$. Pour $k = 1$, l'intégrale est $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_2^{\infty}$ qui diverge. Donc la série converge si et seulement si $k > 1$.

Remarque 4.2.1. La série donnée est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ c'est la série de Bertrand, comme $\alpha = 1$ et d'après le critère de Bertrand, la série converge si et seulement si $k = \beta > 1$.

Exemple 49 (Critère de d'Alembert). Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Solution : Posons $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculons le rapport :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge.

Exemple 50. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Solution : Posons $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Pour n assez grand, a_n est décroissante (on peut vérifier la dérivée de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ qui est négative pour $x > e$).

De plus $a_n \rightarrow 0$. Par le critère de Leibniz, la série alternée converge.

Cependant, la série des valeurs absolues $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge (par comparaison avec la série harmonique). Donc la série est semi-convergente.

4.3 Suites et séries de fonctions

4.3.1 Suites de fonctions

▷ Convergence simple et uniforme

Définition 4.3.1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble E à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- On dit que (f_n) converge simplement vers f sur E si pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
- On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur E si

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Théorème 4.3.1 (Continuité de la limite uniforme). Si chaque f_n est continue sur E et si (f_n) converge uniformément vers f sur E , alors f est continue sur E .

Théorème 4.3.2 (Intégration terme à terme). Si (f_n) converge uniformément vers f sur un intervalle borné $[a, b]$ et si chaque f_n est intégrable, alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Théorème 4.3.3 (Dérivation terme à terme). Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I . Si (f_n) converge simplement vers f sur I et si (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur tout compact de I , alors f est de classe C^1 et $f' = g$.

4.3.2 Séries de fonctions

Pour une série de fonctions $\sum f_n$, on définit la convergence simple et uniforme à partir des sommes partielles.

Définition 4.3.2. La série $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur E si la suite des sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$ converge simplement (resp. uniformément) sur E .

Théorème 4.3.4 (Critère de Cauchy uniforme). La série $\sum f_n$ converge uniformément sur E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $p, q \geq N$ et tout $x \in E$, on a $\left| \sum_{n=p}^q f_n(x) \right| < \varepsilon$.

Théorème 4.3.5 (Convergence normale). On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur E s'il existe une série numérique convergente $\sum M_n$ telle que $\sup_{x \in E} |f_n(x)| \leq M_n$ pour tout n . La convergence normale implique la convergence uniforme.

Exercice 92 (Étude de convergence uniforme). Soit

$$f_n(x) = x^n \quad \text{sur } [0, 1].$$

Étudier la convergence simple et uniforme.

Solution 92.

Pour $x \in [0, 1[$, $x^n \rightarrow 0$ pour $x = 1$, $1^n = 1$. Donc la limite simple est $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. La fonction n'est pas continue en 1, donc la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$ (car les f_n sont continues).

En effet,

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \text{pour tout } n \text{ (prendre } x \text{ proche de } 1).$$

Donc convergence non uniforme. Sur $[0, a]$ avec $a < 1$, on a $\sup \leq a^n \rightarrow 0$, donc uniforme.

Exercice 93. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

sur \mathbb{R} .

Solution 93. Pour $x = 0$, le terme général est nul, donc la série converge.

Pour $x \neq 0$, on a

$$\left| \frac{x}{n(1+nx^2)} \right| \leq \frac{|x|}{n \cdot nx^2} = \frac{1}{n^2|x|}$$

. Donc pour tout x fixé, la série converge par comparaison avec $\sum 1/n^2$. Convergence simple sur \mathbb{R} .

Pour la convergence uniforme, étudions le reste. On peut majorer uniformément : pour tout x ,

$$\left| \frac{x}{n(1+nx^2)} \right| \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$$

en utilisant que

$$\max_{t \geq 0} \frac{t}{1+nt^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (\text{car la fonction } t \mapsto \frac{t}{1+nt^2} \text{ atteint son maximum en } t = 1/\sqrt{n}).$$

En effet, posons $t = |x|$, alors

$$\frac{t}{1+nt^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Donc

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{3/2}},$$

qui est le terme d'une série convergente. Ainsi la série converge normalement sur \mathbb{R} , donc uniformément.

4.4 Séries entières

4.4.1 Définitions et rayon de convergence

Définition 4.4.1. Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes et z est une variable complexe (ou réelle).

Théorème 4.4.1 (Lemme d'Abel). S'il existe $z_0 \neq 0$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors la série converge absolument pour tout z vérifiant $|z| < |z_0|$.

Définition 4.4.2 (Rayon de convergence). Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est défini par :

$$R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ est bornée}\} = \sup\{r \geq 0 : \text{la série converge pour } |z| < r\}.$$

On a alors :

- Pour $|z| < R$, la série converge absolument.
- Pour $|z| > R$, la série diverge.
- Pour $|z| = R$, on ne peut pas conclure a priori.

Théorème 4.4.2 (Formule de Cauchy-Hadamard). Le rayon de convergence est donné par :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

4.4.2 Propriétés des séries entières

Théorème 4.4.3 (Continuité et dérivation). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. La somme $f(z)$ est continue sur le disque ouvert de convergence. De plus, f est indéfiniment dérivable et on peut dériver terme à terme :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \text{avec même rayon } R.$$

Théorème 4.4.4 (Intégration). On peut intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans le disque de convergence :

$$\int_0^z f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \quad |z| < R.$$

Théorème 4.4.5 (Produit de Cauchy). Le produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons respectifs R_1 et R_2 a un rayon au moins égal à $\min(R_1, R_2)$ et

$$\left(\sum a_n z^n \right) \left(\sum b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

4.4.3 Développements en série entière

Définition 4.4.3. Une fonction f est dite développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon au moins r telle que $f(z) = \sum a_n z^n$ pour $|z| < r$. Alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Quelques développements classiques :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1), \quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1).$$

Exercice 94. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

Solution 94.

1. On utilise la *formule de Cauchy-Hadamard* :

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$$

. Par la *formule de Stirling*, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, donc

$$(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}.$$

Ainsi $\sqrt[n]{a_n} \sim \frac{1}{e} \rightarrow 1/e$. Donc $R = e$.

2. On a

$$\sqrt[n]{1/n!} \sim \frac{1}{n/e} \rightarrow 0, \text{ donc } R = \infty.$$

3. On a

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \rightarrow \infty, \text{ donc } R = 0 \text{ la série ne converge que pour } z = 0$$

Exercice 95. Développer en série entière la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et déterminer son rayon de convergence.

Solution 95. On sait que pour tout $|x| < 1$, on

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

En dérivant terme à terme, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Le rayon est 1.

Exercice 96 (Produit de Cauchy). Calculer le produit de Cauchy des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et en déduire une expression de $e^x \cdot \frac{1}{1-x}$ en série entière.

Solution 96. Soit $a_n = 1$, $b_n = 1/n!$.

Le coefficient

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}, \quad (\text{en posant } j = n - k).$$

Donc

$$\frac{1}{1-x} \cdot e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \right) x^n.$$

Le rayon de convergence est le minimum des rayons, soit $R = 1$.

Exercice 97. Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

et étudier la convergence sur le cercle $|z| = 1$.

Solution 97. Par **Cauchy-Hadamard**, $\sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1$, donc $R = 1$.

Pour $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$. La série devient

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

1. Pour $\theta = 0$, c'est la série harmonique divergente.
2. Pour $\theta = \pi$, c'est

$$\sum (-1)^n / n,$$

série alternée convergente.

3. Pour les autres θ , on utilise le critère d'Abel ou on montre que la série converge pour $\theta \neq 2k\pi$ (par transformation d'Abel. En effet, la série converge pour tout $\theta \neq 2k\pi$).

4.5 Séries de Fourier

Les séries de Fourier, introduites par **Joseph Fourier (1768-1830)** dans son étude de la propagation de la chaleur, permettent de représenter des fonctions périodiques comme des sommes infinies de sinus et de cosinus. Elles constituent un outil puissant pour l'analyse des fonctions périodiques et la résolution d'équations aux dérivées partielles. Leur importance dépasse largement le cadre des mathématiques pures, avec des applications essentielles en physique, ingénierie et traitement du signal. La compréhension de leurs propriétés de convergence et de leurs limitations (comme le phénomène de Gibbs) est cruciale pour leur utilisation efficace.

4.5.1 Définitions fondamentales

a- Fonctions périodiques

Définition 4.5.1. Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **périodique** de période $T > 0$ si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D} \quad f(x + T) = f(x)$$

La plus petite période positive est appelée **période fondamentale**.

b- Coefficients de Fourier

Pour une fonction f , T -périodique, intégrable sur $[0, T]$, on définit :

b-1 Forme réelle

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad n \geq 1$$

b-2 Forme complexe

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi nx}{T}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b-3 Relations entre les coefficients

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n \geq 1)$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

▷ **Série de Fourier****a- Forme réelle**

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]$$

b- Forme complexe

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}}$$

Remarque 4.5.1. *Sous certaines conditions, on peut dériver la série terme à terme.*

Exemple 51. *Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.*

- (a) *Calculer les coefficients de Fourier de f .*
 (b) *Écrire la série de Fourier de f .*

Solution :

f est impaire, donc :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbf{N}$$

Calculons b_n par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 \right) \\
 &= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

4.5.2 Formule de Parseval

Pour $f \in L^2([0, T])$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Exemple 52. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

(a) Écrire l'égalité de Parseval pour f .

(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution :

(a) D'après l'exemple (51) 2, les coefficients de Fourier de f sont :

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

L'égalité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Ici, cela donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right)^2$$

(b) Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, l'égalité de Parseval donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{3} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

Ce résultat confirme celui obtenu à l'exercice 3.

4.5.3 Théorèmes de convergence

a- Convergence ponctuelle (Dirichlet)

Si f est T -périodique, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors pour tout x :

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche.

$$f(x^+) = \lim_{x \rightarrow x^+} f(x), \quad \text{et} \quad f(x^-) = \lim_{x \rightarrow x^-} f(x)$$

En particulier :

— Aux points de continuité : $S_f(x) = f(x)$

— Aux points de discontinuité : $S_f(x)$ vaut la moyenne des limites : $S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

Exemple 53. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Solution :

On a trouvé dans l'exemple 51 la série de Fourier de f sous la forme :

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

La fonction f est de classe C^1 par morceaux. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, le théorème de Dirichlet donne :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

D'autre part :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Or $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ prend les valeurs :

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \left(\frac{1}{1}(-1)^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}(-1)^4 \cdot (-1) + \frac{1}{5}(-1)^6 \cdot 1 + \frac{1}{7}(-1)^8 \cdot (-1) + \dots \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

C'est la formule de Leibniz pour π .

b- Convergence uniforme

Théorème 4.5.1. Si f est continue, T -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge uniformément vers f .

c. Convergence en norme L^2 (Théorème de Riesz-Fischer)

Théorème 4.5.2. Pour toute $f \in L^2([0, T])$, la série de Fourier converge vers f en norme L^2 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |f(x) - S_N(x)|^2 dx = 0$$

où S_N est la somme partielle d'ordre N .

d- Convergence normale

Théorème 4.5.3. Soit

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n x}{T}}.$$

Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, alors la série de Fourier converge normalement (donc uniformément et absolument).

Convolution périodique

Pour f, g T -périodiques, la convolution périodique est définie par :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y)g(x-y)dy.$$

On a alors :

$$c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_n(g).$$

4.5.4 Opérations sur les séries de Fourier

Opération sur f	Effet sur les coefficients
Dérivation	$c_n(f') = \frac{2\pi i n}{T} c_n(f)$
Intégration	$c_n(\int f) = \frac{T}{2\pi i n} c_n(f)$ (pour $n \neq 0$)
Translation $f(x-a)$	$c_n(f(x-a)) = e^{-2\pi i n a/T} c_n(f)$
Modulation $e^{2\pi i k x/T} f(x)$	Décalage d'indices
Convolution	$c_n(f * g) = T c_n(f) c_n(g)$

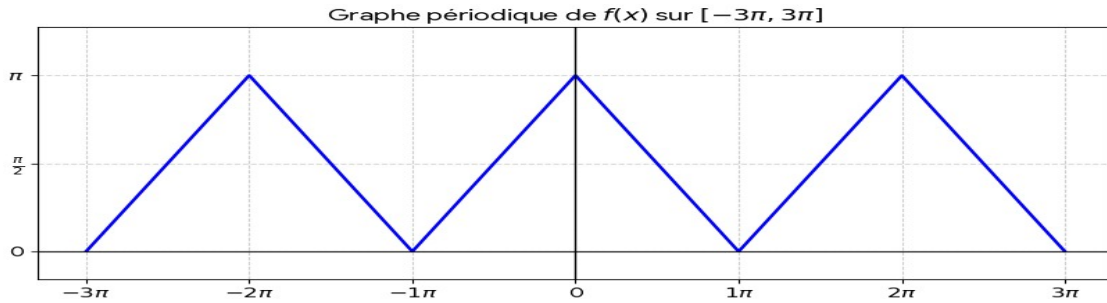
Exercice 98. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

- Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- Calculer les coefficients de Fourier de f .

Solution 98.

- Le graphe de f est une fonction en "dents de scie" symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, avec des pics à chaque multiple pair de π .
- Vérifions la continuité aux points de raccordement :



— En $x = 0$: $f(0^-) = \pi$, $f(0) = \pi$, $f(0^+) = \pi$, donc continue.

— En $x = \pi$: $f(\pi^-) = \pi - \pi = 0$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi + \pi = 0$, donc continue.

f est affine par morceaux, donc continue sur \mathbb{R} .

(c) f est paire (vérification : $f(-x) = -x + \pi = \pi - x = f(x)$ pour $x > 0$), donc $b_n = 0$.

Calculons a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos(nx) dx$$

Calculons par parties :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi \pi \cos(nx) dx - \int_0^\pi x \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 - \left(0 - \left[-\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4.5.5 Exemples fondamentaux

a- Fonction créneau (ou signal carré)

Pour f 2π -périodique avec $f(x) = \text{sign}(\sin x)$:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Ceci illustre le **phénomène de Gibbs** : les oscillations près des discontinuités.

b- Fonction triangle

Pour f 2π -périodique, $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

c- Fonction dent de scie

Pour f 2π -périodique, $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

4.5.6 Table des séries de Fourier usuelles

Fonction (période 2π)	Série de Fourier	Conditions
$f(x) = x$	$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$	$x \in (-\pi, \pi)$
$f(x) = x $	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$	$x \in [-\pi, \pi]$
$f(x) = x^2$	$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$	$x \in [-\pi, \pi]$
$\text{sign}(x)$	$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$	$x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$
$\Pi_a(x)$ (porte)	$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(nx)$	$\Pi_a(x) = 1$ si $ x < a$, 0 sinon
$\Lambda_a(x)$ (triangle)	$\frac{a}{\pi} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(na)}{n^2} \cos(nx)$	$\Lambda_a(x) = \max(1 - x /a, 0)$

TABLE 4.1 – Séries de Fourier de fonctions usuelles

4.6 Exercices corrigées**4.6.1 Séries numériques**

Exercice 99. Étudier la nature de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Solution 99. On utilise le critère de condensation de Cauchy. Posons $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.

La suite est positive et décroissante à partir d'un certain rang. La série condensée

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}$$

est la série harmonique divergente (à un facteur près). Donc la série diverge.

Exercice 100 (Critère de d'Alembert). Déterminer la nature de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ pour $x > 0$.

Solution 100. Posons $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. Calculons le rapport :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} x \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} x = \frac{n+1}{2(2n+1)} x. \end{aligned}$$

On a,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{4}.$$

Par le critère de d'Alembert, la série

- converge si $x < 4$,
- diverge si $x > 4$.
- Pour $x = 4$, le rapport tend vers 1, le critère ne permet pas de conclure.
En $x = 4$, on a

$$a_n \sim \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}.$$

Par la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, donc

$$(n!)^2 \sim 2\pi n(n/e)^{2n} \quad \text{et} \quad (2n)! \sim \sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n} = \sqrt{4\pi n} 2^{2n} (n/e)^{2n}.$$

Alors

$$a_n \sim \frac{2\pi n(n/e)^{2n} 4^n}{\sqrt{4\pi n} 2^{2n} (n/e)^{2n}} = \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}} = \sqrt{\pi n}. \quad \text{Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.}$$

Ainsi la série converge pour $0 < x < 4$ et diverge pour $x \geq 4$.

Exercice 101 (Série alternée). Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solution 101. Posons $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. On a

$$a_n > 0 \quad \text{et} \quad a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Étudions la décroissance de la suite (a_n) . Considérons

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Pour $x > 1$, $f'(x) < 0$. Donc pour $n \geq 2$, la suite (a_n) est décroissante. Par le critère de Leibniz, la série alternée converge. La série des valeurs absolues $\sum a_n$ diverge car $a_n \sim 1/\sqrt{n}$ (série de Riemann divergente). Donc la série est semi-convergente.

Exercice 102 (Comparaison avec une intégrale). Déterminer la nature de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Solution 102. La fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est positive et décroissante pour $x \geq 2$.

L'intégrale

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}, \quad \text{converge.}$$

Donc par le critère intégral, la série converge.

Exercice 103 (Série avec paramètre). Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$ converge-t-elle ?

Solution 103. On a l'équivalent

$$1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Donc le terme général est équivalent à

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}.$$

La série converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

4.6.2 Suites et séries de fonctions

Exercice 104 (Convergence simple et uniforme). Soit $f_n(x) = nxe^{-nx}$ pour $x \geq 0$. Étudier la convergence simple et uniforme.

Solution 104. On a

— Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$.

— Pour $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-nx} = 0.$$

Donc f_n converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $[0, \infty[$.

Pour la convergence uniforme, étudions

$$\sup_{x \geq 0} f_n(x).$$

La fonction $g_n(x) = nxe^{-nx}$ atteint son maximum en $x = 1/n$ (dérivée nulle), et

$$g_n(1/n) = n \cdot \frac{1}{n} e^{-1} = e^{-1}.$$

Donc

$$\sup f_n(x) = e^{-1} \neq 0.$$

La convergence n'est pas uniforme sur $[0, \infty[$. Cependant, sur tout intervalle $[a, \infty[$ avec $a > 0$, on peut montrer la convergence uniforme car le maximum est alors plus petit.

Exercice 105 (Série de fonctions). Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$ sur \mathbb{R} .

Solution 105. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}.$$

Mais cette majoration dépend de x et n'est pas uniforme. On cherche une majoration indépendante de x . Pour x fixé, le terme général est $O(1/n^2)$ donc la série converge simplement.

Pour la convergence uniforme, on peut étudier le reste. Une autre approche : on a pour tout x ,

$$\left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{2n}$$

car

$$\max_{t \geq 0} \frac{t}{n^2 + t^2} = \frac{1}{2n} \quad (\text{atteint en } t = n).$$

Donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum \frac{1}{2^n}$ diverge, donc pas de convergence normale. Cependant, la convergence uniforme peut tout de même avoir lieu sans convergence normale. Pour le vérifier, on peut utiliser le critère de Cauchy uniforme ou étudier le reste.

Exercice 106 (Convergence uniforme et dérivation). Soit

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la suite converge uniformément vers 0, mais que la suite des dérivées ne converge pas uniformément.

Solution 106. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

alors,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq 1/n \rightarrow 0.$$

Donc convergence uniforme vers 0.

Les dérivées sont $f'_n(x) = \cos(nx)$ qui ne converge pas (même simplement, sauf en certains points). Donc pas de convergence uniforme des dérivées.

Exercice 107 (Série de fonctions et convergence normale). Étudier la convergence normale de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Solution 107. On a

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum 1/n^2$ converge, donc la série converge normalement sur \mathbb{R} . Par conséquent, elle converge uniformément et la somme est continue.

4.6.3 Séries entières

Exercice 108 (Rayon de convergence). Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}.$$

Solution 108.

1.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1/n!} \rightarrow 0 \quad (\text{car } n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n), \quad \text{donc } R = \infty.$$

2.

$$\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty, \quad \text{donc } R = 0.$$

3.

$$\sqrt[n]{1/(n^2 + 1)} \rightarrow 1, \quad \text{donc } R = 1.$$

4. Il s'agit d'une série entière en z^2 . On peut poser $w = z^2$. Alors la série devient

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!} w^n.$$

Son rayon en w est ∞ . Donc pour z , le rayon est aussi ∞ (car pour tout z , z^2 est dans le disque de convergence). Ou on calcule directement $\sqrt[n]{|a_n|}$? Attention, les coefficients sont non nuls seulement pour les puissances

paires.

On peut utiliser la formule de Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \text{avec } a_n \text{ le coefficient de } z^n.$$

Ici,

$$a_{2n} = (-1)^n/n! \text{ et } a_{2n+1} = 0.$$

Alors

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

est la limite supérieure des racines n -ièmes des termes non nuls. Pour les indices pairs,

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{1/n!} \rightarrow 0.$$

Pour les indices impairs, c'est 0. Donc la limite supérieure est 0, donc $R = \infty$.

Exercice 109 (Somme de série entière). Développer en série entière la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$$

et déterminer son rayon de convergence.

Solution 109. On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}.$$

En résolvant, on trouve $A = -1$, $B = 2$. Donc

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}.$$

On a

— pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

— et pour $|2x| < 1$ i.e. $|x| < 1/2$,

$$\frac{2}{1-2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

Donc pour $|x| < 1/2$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 2^{n+1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)x^n$. Le rayon de convergence est $1/2$ (car la série a des coefficients en 2^n).

Exercice 110 (Produit de Cauchy). Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Calculer le produit de Cauchy de ces deux séries et en déduire une expression simple.

Solution 110. On a

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Pour $g(x)$, on sait que

$$\text{pour } |x| < 1, \quad \frac{1}{1-t} = \sum t^n,$$

intégrons les deux membres

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Ainsi

$$g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Le produit de Cauchy donne

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

où $a_k = 1$ et $b_{n-k} = \frac{1}{n-k+1}$. Donc

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} = H_{n+1}, \quad (\text{nombre harmonique}).$$

Ainsi

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n.$$

On a donc le développement en série

$$f(x)g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}.$$

Exercice 111. Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

et étudier la convergence sur le cercle $|z| = 1$.

Solution 111. On a

$$\sqrt[n]{1/n^2} \rightarrow 1, \quad \text{donc} \quad R = 1.$$

Pour $|z| = 1$, on a

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}, \quad \text{donc la série converge absolument.}$$

Donc elle converge pour tout z avec $|z| = 1$.

Exercice 112 (Série entière et équation différentielle). Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$x f''(x) + f'(x) - f(x) = 0.$$

Solution 112. Calculons les dérivées :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!^2} x^n.$$

On a donc

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n!)^2}.$$

Ensuite

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)x^n}{((n+2)!)^2}.$$

On peut écrire l'équation sous forme de série. Calculons

$$xf''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2}.$$

Donc

$$xf''(x) + f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1) + n}{(n!)^2} x^{n-1} + \frac{1}{(1!)^2} x^0$$

Écrivons tout avec l'indice $m = n - 1$. Alors pour $m \geq 1$, le coefficient de x^m est

$$\frac{(m+1)^2}{((m+1)!)^2}.$$

Et le terme constant est 1. D'autre part,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m!)^2}.$$

Donc

$$xf'' + f' - f = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(m+1)^2}{((m+1)!)^2} - \frac{1}{(m!)^2} \right) x^m.$$

Or

$$\frac{(m+1)^2}{((m+1)!)^2} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2(m!)^2} = \frac{1}{(m!)^2}.$$

Donc les termes s'annulent pour $m \geq 1$. Il reste le terme constant $1 - \frac{1}{(0!)^2} = 1 - 1 = 0$. Donc l'équation est vérifiée.

Exercice 113. Trouver le rayon de convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}$$

et étudier la convergence en $z = 2$ et $z = -2$.

Solution 113. On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1/(n2^n)} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{1/n} \rightarrow 1/2.$$

Donc $R = 2$.

— En $z = 2$, la série devient

$$\sum \frac{2^n}{n2^n} = \sum \frac{1}{n} \quad (\text{série harmonique divergente}).$$

— En $z = -2$, la série devient

$$\sum \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{qui converge (série alternée)}.$$

Donc convergence en $z = -2$, divergence en $z = 2$.

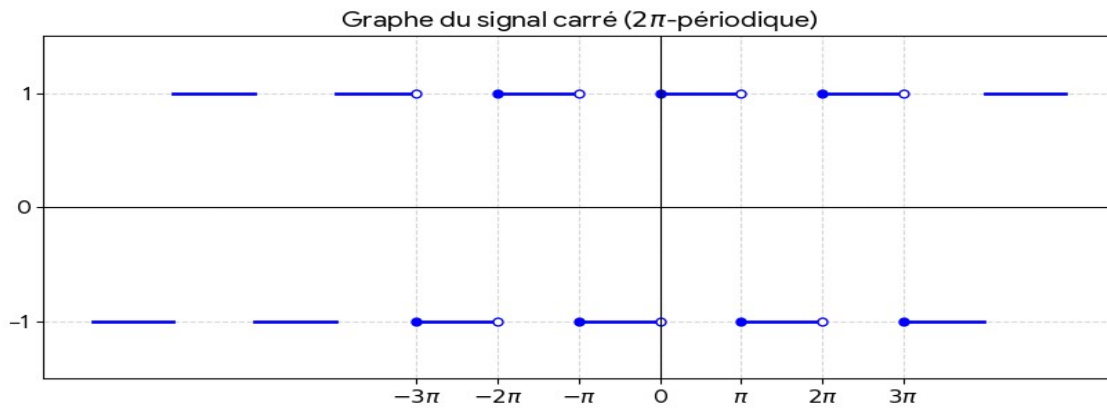
4.6.4 Serie de Fourier

Exercice 114. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (\text{C'est la fonction "créneau" ou "signal carré".})$$

- Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Écrire la série de Fourier de f .
- Étudier la convergence de la série de Fourier en tout point.

Solution 114.



(a)

(b) f est impaire car $f(-x) = -f(x)$. Donc :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique)
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$ pour $n \geq 1$ (produit d'une fonction impaire et d'une fonction paire)
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ (produit d'une fonction impaire et d'une fonction impaire, donc fonction paire)

Calculons :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(0)}{n} \right) = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

Or $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donc :

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

En posant $n = 2k + 1$ (impair), on a $b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$.

(c) La série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$$

(d) La fonction f est de classe C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge en tout point x et a pour somme :

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche.

En particulier :

- Aux points de continuité (i.e., $x \neq k\pi$), $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, donc $S_f(x) = f(x)$.
- Aux points de discontinuité ($x = k\pi$), $f(k\pi^+) = 1$ ou -1 et $f(k\pi^-) = -1$ ou 1 , donc $S_f(k\pi) = \frac{1+(-1)}{2} = 0$.

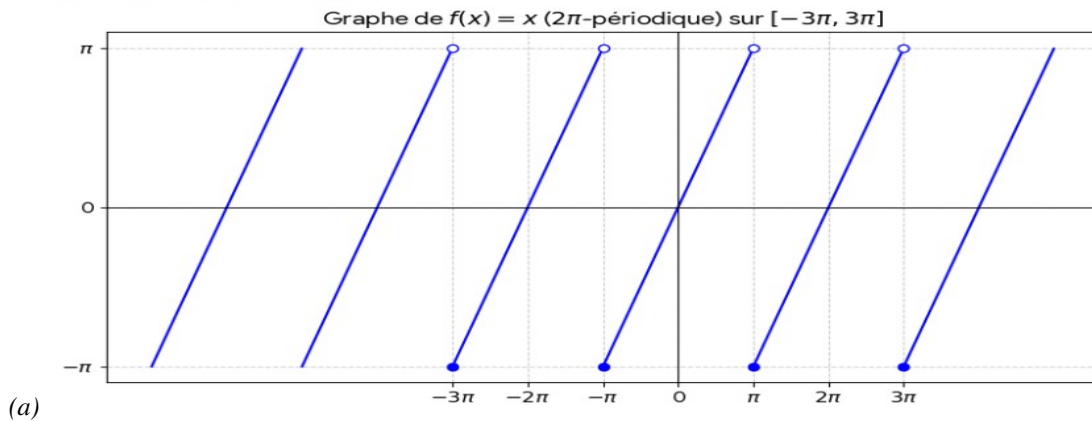
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq k\pi \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases}$$

Exercice 115. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.

- (a) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- (b) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (c) Écrire la série de Fourier de f .
- (d) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Solution 115.



(b) f est impaire, donc :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0$ pour $n \geq 1$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$

Calculons b_n par intégration par parties :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 \right) \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

(c) La série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

(d) La fonction f est de classe C^1 par morceaux. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, le théorème de Dirichlet donne :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

D'autre part :

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Or $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ prend les valeurs :

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{1}(-1)^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}(-1)^4 \cdot (-1) + \frac{1}{5}(-1)^6 \cdot 1 + \frac{1}{7}(-1)^8 \cdot (-1) + \dots\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

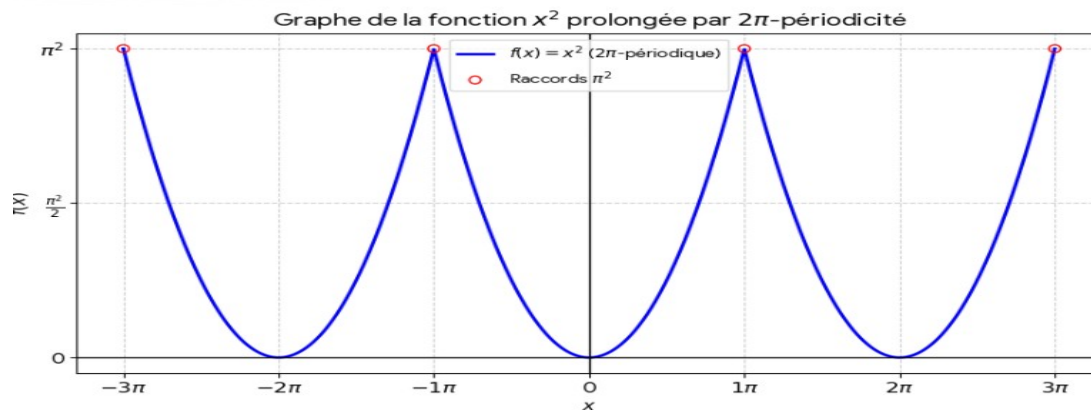
C'est la formule de Leibniz pour π .

Exercice 116. Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

- Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Montrer que f est paire et calculer ses coefficients de Fourier.
- Écrire la série de Fourier de f .
- En déduire les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Solution 116.



(b) f est paire car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Donc :

- $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$
- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

— Pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

Calculons a_n par deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \quad (\text{car } \sin(n\pi) = 0) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + 0 \right) \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

(c) La série de Fourier de f est :

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx)$$

(d) La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, pour tout x , $S_f(x) = f(x)$.

Pour $x = \pi$: $f(\pi) = \pi^2$, et :

$$S_f(\pi) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(n\pi)$$

Or $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donc $(-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^{2n} = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \Rightarrow 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \pi^2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{5\pi^2}{6} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Pour $x = 0$: $f(0) = 0$, et :

$$\begin{aligned} S_f(0) &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(0) = \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= -\frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

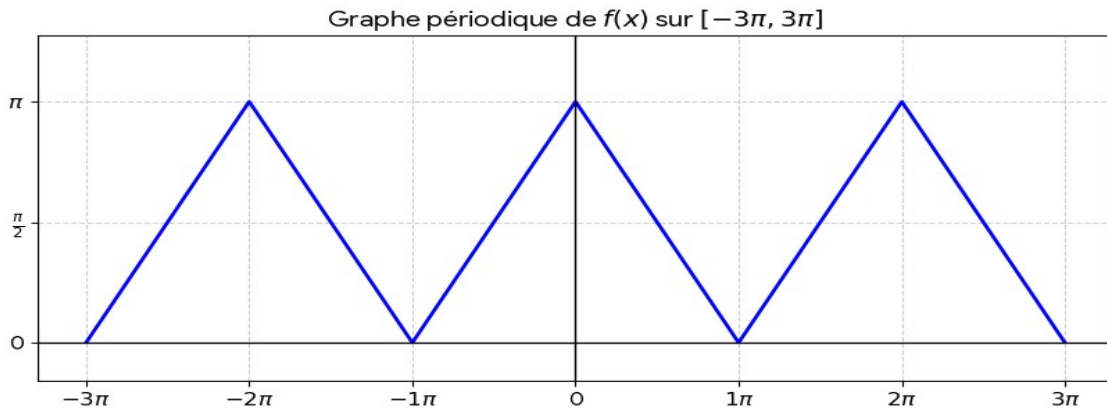
4.6.5 Théorèmes de convergence

Exercice 117. (Voir l'exercice 98) Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

- Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
- En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution 117. (a) Le graphe de f est une fonction en "dents de scie" symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, avec des pics à chaque multiple pair de π .



- Vérifions la continuité aux points de raccordement :
 - En $x = 0$: $f(0^-) = \pi$, $f(0) = \pi$, $f(0^+) = \pi$, donc continue.
 - En $x = \pi$: $f(\pi^-) = \pi - \pi = 0$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi + \pi = 0$, donc continue. f est affine par morceaux, donc continue sur \mathbb{R} .
- (c) f est paire (vérification : $f(-x) = -x + \pi = \pi - x = f(x)$ pour $x > 0$), donc $b_n = 0$.
Calculons a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx$$

Calculons par parties :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi \pi \cos(nx) dx - \int_0^\pi x \cos(nx) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\pi \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(0 - \left(0 - \left[-\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi) - \cos(0)}{n^2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(d) f est continue et de classe C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge normalement (et donc uniformément) vers f sur \mathbb{R} .

(e) Pour $x = 0$, on a $f(0) = \pi$, et :

$$S_f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$$

Or $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$, donc :

$$\begin{aligned}
 \pi &= \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
 \Rightarrow \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \\
 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir ce résultat à partir de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 \Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

4.6.6 Égalité de Parseval

Exercice 118. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

(a) Écrire l'égalité de Parseval pour f .

(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution 118. (a) D'après l'exercice 115, les coefficients de Fourier de f sont :

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

L'égalité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Ici, cela donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \right)^2$$

(b) Calculons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, l'égalité de Parseval donne :

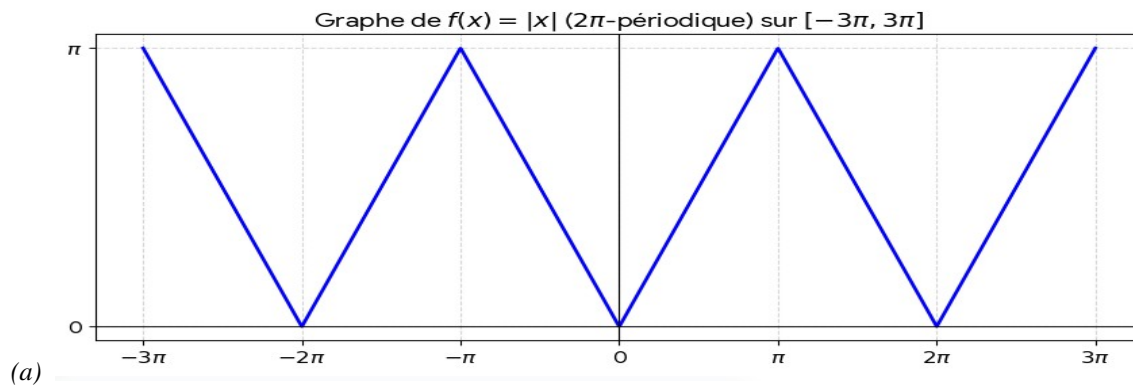
$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Ce résultat confirme celui obtenu à l'exercice 3.

Exercice 119. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

- Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Écrire l'égalité de Parseval pour f .
- En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Solution 119.



(b) f est paire, donc $b_n = 0$.

Calculons a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

Pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 - \left[-\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(c) L'égalité de Parseval donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |x|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty a_n^2$$

Calculons le membre de gauche :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

Le membre de droite :

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{4} &= \frac{\pi^2}{4} \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty a_n^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty a_{2k+1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} \end{aligned}$$

(d) L'égalité de Parseval s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} \\ \Rightarrow \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} &= \frac{\pi^4}{96} \end{aligned}$$

On peut aussi exprimer la somme sur tous les entiers :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96} \\ \Rightarrow \frac{15}{16} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{96} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

C'est la valeur de la fonction zêta de Riemann en 4.

4.6.7 Applications aux équations différentielles

Exercice 120. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

où $\omega > 0$ n'est pas un entier, et f est la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

- (a) Chercher une solution 2π -périodique de cette équation sous forme d'une série de Fourier.
 (b) Exprimer cette solution comme une intégrale.

Solution 120. (a) On cherche une solution 2π -périodique y sous la forme :

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

On sait que f a pour coefficients de Fourier :

$$a_n^{(f)} = 0 \quad (n \geq 0), \quad b_n^{(f)} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

En dérivant terme à terme (ce qui est justifié car on cherche une solution régulière) :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx))$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx))$$

En remplaçant dans l'équation :

$$y'' + \omega^2 y = \frac{\omega^2 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\omega^2 - n^2) a_n \cos(nx) + (\omega^2 - n^2) b_n \sin(nx)] = f(x)$$

Par unicité des coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 a_0}{2} = 0 &\Rightarrow a_0 = 0 \\ (\omega^2 - n^2) a_n = 0 &\Rightarrow a_n = 0 \quad (\text{car } \omega^2 \neq n^2) \\ (\omega^2 - n^2) b_n = b_n^{(f)} &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \\ \Rightarrow b_n &= \frac{2}{n(\omega^2 - n^2)} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution est :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(\omega^2 - n^2)} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

(b) On peut aussi exprimer y à l'aide de la fonction de Green. La solution de $y'' + \omega^2 y = f(x)$ est donnée par :

$$y(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x, t) f(t) dt$$

où G est la fonction de Green périodique.

Pour l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, les solutions sont de la forme $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$. En imposant les conditions de périodicité et de continuité, on trouve :

$$G(x, t) = \frac{1}{2\omega \sin(\omega\pi)} \cos(\omega(|x - t| - \pi))$$

pour $x \neq t$.

Ainsi :

$$y(x) = \frac{1}{2\omega \sin(\omega\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(\omega(|x - t| - \pi)) dt$$

Cette expression est équivalente à la série trouvée en (a).

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique puissant et polyvalent qui permet d'analyser les signaux dans le domaine fréquentiel. Ses applications s'étendent de la physique fondamentale au traitement du signal moderne. La compréhension de ses propriétés, théorèmes et limitations est essentielle pour son utilisation efficace dans la résolution de problèmes pratiques. Elle joue un rôle crucial en ingénierie et dans de nombreux autres domaines.

5.1 Transformée de Fourier

5.1.1 Définitions et notations

▷ Transformée de Fourier continue

Définition 5.1.1. Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$$

On rencontre également les conventions suivantes :

- **Convention physique** : $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
- **Convention statistique** : $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt$
- **Convention alternative** : $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$

Exemples 2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta] &= 1 \\ \mathcal{F}[1] &= 2\pi\delta \\ \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}] &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ \mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] &= i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ \mathcal{F}[u(t)] &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \quad (\text{au sens de la valeur principale}) \end{aligned}$$

Exercice 121. Calculer $\mathcal{F}[e^{-a|t|}]$ pour $a > 0$.

Solution 121.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-a|t|}](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\
&= \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

5.1.2 Transformée inverse

Définition 5.1.2. *Sous conditions appropriées, la transformée inverse est donnée par :*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

5.1.3 Conditions d'existence

1. **Condition suffisante** : $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}$ existe et est continue
2. **Condition nécessaire et suffisante** (pour l'inversion) : $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

5.1.4 Propriétés fondamentales

Propriété	Temps	Fréquence
Linéarité	$a f(t) + b g(t)$	$a \hat{f}(\omega) + b \hat{g}(\omega)$
Translation	$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$
Modulation	$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \omega_0)$
Dilatation	$f(at)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Conjugaison	$\overline{f(t)}$	$\hat{f}(-\omega)$
Dérivation	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
Dérivation en fréquence	$(-it)^n f(t)$	$\frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n}$
Convolution	$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
Produit	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$

TABLE 5.1 – Propriétés de la transformée de Fourier

▷ **Démonstration de propriétés importantes****1- Convolution**

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} \hat{g}(\omega) d\tau \\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

2- Dérivation

Si f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \hat{f}(\omega) \quad (\text{car } f \in L^1 \Rightarrow \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0)\end{aligned}$$

5.1.5 Transformées de Fourier usuelles

Fonction $f(t)$	Transformée $\hat{f}(\omega)$	Conditions
$\delta(t)$ (Dirac)	1	$\forall \omega$
1	$2\pi\delta(\omega)$	au sens des distributions
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	au sens des distributions
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	au sens des distributions
$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	au sens des distributions
$u(t)$ (échelon)	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$	au sens des distributions
$\Pi_a(t)$ (porte)	$2a \cdot \text{sinc}(a\omega) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$	$a > 0$
$\text{sinc}(at)$	$\frac{\pi}{a} \Pi_{\frac{a}{2\pi}}(\omega)$	$a > 0$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0, \text{Re}(a) > 0$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$a > 0, \text{Re}(a) > 0$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$	$a > 0$

TABLE 5.2 – Table des transformées de Fourier

5.1.6 Théorèmes fondamentaux**1- Théorème de Plancherel (ou Parseval)**

Théorème 5.1.1. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

En particulier, pour $f = g$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Ce théorème montre que la transformée de Fourier est une isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$ (à un facteur 2π près).

2- Théorème d'inversion

Théorème 5.1.2. Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Si de plus f est continue, l'égalité est vraie partout.

3- Théorème de convolution

Théorème 5.1.3. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Réciproquement :

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

5.2 Extensions et généralisations

1- Transformée de Fourier en dimension n

Définition 5.2.1. Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

où $x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$.

2- Transformée de Fourier discrète (DFT)

Définition 5.2.2. Pour une suite finie $(x_n)_{0 \leq n \leq N-1}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformée inverse :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

5.3 Applications

1- Équations aux dérivées partielles

1.a- Équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x)$$

En prenant la TF en x :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\alpha \omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

Solution :

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\alpha \omega^2 t} \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}} dy$$

1.b- Équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

En TF :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -c^2 \omega^2 \hat{u}$$

Solution :

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \cos(c\omega t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega} \sin(c\omega t)$$

Exercice 122. Résoudre $y'' + 2y' + y = f(t)$ par transformée de Fourier.

Solution 122.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y'' + 2y' + y] &= \mathcal{F}[f] \\ (-\omega^2 + 2i\omega + 1)\hat{y}(\omega) &= \hat{f}(\omega) \\ \hat{y}(\omega) &= \frac{\hat{f}(\omega)}{(1 - \omega^2) + 2i\omega} \\ y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\hat{f}(\omega)}{(1 + i\omega)^2} \right] = (f * g)(t) \end{aligned}$$

avec $g(t) = te^{-t}u(t)$.

3- Traitement du signal

3-a Filtrage linéaire

Un filtre linéaire invariant dans le temps est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa fonction de transfert $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$.

Sortie du filtre pour une entrée $x(t)$:

$$y(t) = (x * h)(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega).$$

3-b Échantillonnage et théorème de Shannon

Pour un signal $f(t)$ à bande limitée ($\hat{f}(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \omega_m$), on peut le reconstruire à partir de ses échantillons pris à la fréquence $\omega_s \geq 2\omega_m$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) \frac{\sin(\omega_m t - n\pi)}{\omega_m t - n\pi}.$$

4- Mécanique quantique

En mécanique quantique, la transformée de Fourier relie la représentation position et la représentation impulsion :

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx,$$

avec la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

5.4 Relations entre La transformée de Laplace et la transformée de Fourier

Transformée	Domaine	Relation avec Fourier
Laplace	\mathbb{R}^+	$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\}(i\omega), s = \sigma + i\omega$
Laplace bilatérale	\mathbb{R}	Cas particulier avec $s = i\omega$

Exercice 123 (Transformée de Fourier pour l'équation de Laplace dans le demi-plan). Résoudre le problème de Dirichlet dans le demi-plan $y > 0$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u \text{ bornée.}$$

Solution 123. On prend la transformée de Fourier en x . L'équation devient

$$-\xi^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0,$$

avec $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$. La solution bornée pour $y > 0$ est

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Par transformée inverse,

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi,$$

qui est le noyau de Poisson.

5.5 Exercices corrigés

5.5-1 Calcul de transformées de Fourier

Exercice 124. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes (dans $L^1(\mathbb{R})$) :

(a) $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ avec $a > 0$

(c) $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

Solution 124. On rappelle que la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

(a) Pour $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$:

Par parité de f , on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx \quad (\text{car la partie imaginaire s'annule}) \end{aligned}$$

On utilise la formule :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \text{ pour } a > 0.$$

Ainsi :

$$\hat{f}(\xi) = 2 \cdot \frac{a}{a^2 + \xi^2} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

(b) Pour

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \text{ avec } a > 0$$

On remarque que $\frac{1}{a^2 + x^2}$ est la transformée de Fourier d'une fonction que nous venons de calculer, à un facteur près. D'après le théorème d'inversion et le calcul précédent, on a :

$$e^{-a|\xi|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + x^2} e^{i\xi x} dx$$

Donc :

$$\frac{2a}{a^2 + x^2} = \mathcal{F}^{-1}[e^{-a|\xi|}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\xi|} e^{i\xi x} \frac{d\xi}{2\pi}$$

En changeant les rôles de x et ξ , on obtient :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + x^2}\right](\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$$

(c) Pour $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2 + \frac{i\xi}{a}x)} dx \end{aligned}$$

On complète le carré :

$$x^2 + \frac{i\xi}{a}x = \left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}$$

Ainsi :

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + \frac{i\xi}{2a})^2} dx$$

Par le théorème de Cauchy et la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, on obtient :

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(d) Pour $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$:

Cette fonction peut s'écrire $f(x) = \Lambda(x)$ où Λ est la fonction triangle. On calcule directement :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{-i\xi x} dx$$

Par parité :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= 2 \int_0^1 (1-x) \cos(\xi x) dx \\ &= 2 \left[\frac{(1-x) \sin(\xi x)}{\xi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sin(\xi x)}{\xi} dx \\ &= 0 + \frac{2}{\xi} \left[-\frac{\cos(\xi x)}{\xi} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\xi^2} (1 - \cos \xi)\end{aligned}$$

On reconnaît une formule trigonométrique : $1 - \cos \xi = 2 \sin^2(\xi/2)$, donc :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4 \sin^2(\xi/2)}{\xi^2} = \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^2$$

Exercice 125. Soit

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{x} \quad \text{avec } a > 0.$$

- (a) Calculer la transformée de Fourier de f .
 (b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx.$$

Solution 125. (a) On sait que la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a/2 \\ 0 & \text{si } |x| > a/2 \end{cases}$ est :

$$\mathcal{F}[\Pi_a](\xi) = \frac{\sin(a\xi/2)}{\xi/2} = 2a \frac{\sin(a\xi/2)}{a\xi}$$

Plus précisément, pour $\Pi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$, on a :

$$\mathcal{F}[\Pi_a](\xi) = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$$

Par le théorème d'inversion de Fourier, on a :

$$\Pi_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi} e^{i\xi x} d\xi$$

En échangeant les rôles de x et ξ , on obtient :

$$\frac{2 \sin(ax)}{x} = \mathcal{F}[\Pi_a(-\xi)] = 2\pi \Pi_a(-\xi)$$

Plus rigoureusement, par dualité, si $\mathcal{F}[f] = g$, alors $\mathcal{F}[g](x) = 2\pi f(-x)$. Ici, prenons $f(x) = \Pi_a(x)$, alors $\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$. Donc :

$$\mathcal{F} \left[\frac{2 \sin(a \cdot)}{\cdot} \right] (x) = 2\pi \Pi_a(-x) = 2\pi \Pi_a(x)$$

car Π_a est paire.

Ainsi :

$$\mathcal{F} \left[\frac{\sin(ax)}{x} \right] (\xi) = \pi \Pi_a(\xi) = \begin{cases} \pi & \text{si } |\xi| < a \\ 0 & \text{si } |\xi| > a \end{cases}$$

(b) En utilisant le résultat précédent avec $\xi = 0$:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin(ax)}{x}\right](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi$$

Plus généralement, on retrouve la valeur bien connue de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi \quad \text{pour } a > 0$$

5.5-2 Propriétés de la transformation de Fourier

Exercice 126. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) Translation : $\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$

(b) Modulation : $\mathcal{F}[e^{iax} f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi - a)$

(c) Dilatation : $\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$ pour $a \neq 0$

(d) Dérivation : Si $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

(e) Dérivation de la transformée : Si $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors \hat{f} est dérivable et $\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi)$

Solution 126. (a) Translation :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x-a)](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi(u+a)} du \quad (\text{changement de variable } u = x-a) \\ &= e^{-ia\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u} du \\ &= e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

(b) Modulation :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{iax} f(x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\xi-a)x} dx \\ &= \hat{f}(\xi - a) \end{aligned}$$

(c) Dilatation :

$$\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-i\xi x} dx$$

Pour $a > 0$, changement de variable $u = ax$, $dx = du/a$:

$$\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u/a} du = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

Pour $a < 0$, $a = -|a|$, changement de variable $u = ax$, $dx = du/a = -du/|a|$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(ax)](\xi) &= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u) e^{-i\xi u/a} du \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u/a} du \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u/a} du \quad (\text{car } -1/a = 1/|a|) \\ &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)\end{aligned}$$

(d) Dérivation : Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= [f(x) e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx\end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, donc :

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

(e) Dérivation de la transformée : Sous l'hypothèse $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, on peut dériver sous le signe intégral :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-ix) e^{-i\xi x} dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= -i \mathcal{F}[xf(x)](\xi)\end{aligned}$$

La justification du passage de la dérivée sous l'intégrale vient du théorème de dérivation sous le signe intégrale de Lebesgue, applicable car $|xf(x)e^{-i\xi x}| = |xf(x)| \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 127. Soit

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

1. Calculer $\hat{f}(\xi)$.
2. En utilisant les propriétés de dérivation, trouver une équation différentielle vérifiée par \hat{f} .
3. Retrouver le résultat du calcul direct.

Solution 127.

(a) On a vu dans l'exercice 124 que pour

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Pour $a = 1/2$, on obtient :

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$$

(b) On va utiliser les propriétés de dérivation. On a :

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\xi) &= i\xi\hat{f}(\xi) \\ \mathcal{F}[xf(x)](\xi) &= i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = \mathcal{F}[-xf(x)](\xi) = -i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$$

Ainsi, \hat{f} vérifie l'équation différentielle :

$$i\xi\hat{f}(\xi) = -i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$$

soit :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -\xi\hat{f}(\xi)$$

(c) Cette équation différentielle est séparable :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} &= -\xi d\xi \\ \ln|\hat{f}(\xi)| &= -\frac{\xi^2}{2} + C \\ \hat{f}(\xi) &= Ke^{-\xi^2/2}\end{aligned}$$

La constante K se détermine en évaluant en $\xi = 0$:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Donc $K = \sqrt{2\pi}$, et on retrouve bien :

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$$

5.5-3 Produit de convolution

Exercice 128. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On définit le produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$$

(a) Montrer que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}[f * g] = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(c) Soient $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$. Calculer $f * g$.

Solution 128. (a) On utilise le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-y)| dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \|g\|_1 dy \quad (\text{par invariance par translation}) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

Donc $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(b) Calculons la transformée de Fourier du produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) e^{-i\xi x} dx \right) dy\end{aligned}$$

Dans l'intégrale intérieure, faisons le changement de variable $u = x - y$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-i\xi(u+y)} du = e^{-i\xi y} \hat{g}(\xi)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi y} \hat{g}(\xi) dy \\ &= \hat{g}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)\end{aligned}$$

(c) Pour $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$:

On a :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \mathbb{I}_{[-1,1]}(x-y) dy = \int_{x-1}^{x+1} e^{-|y|} dy$$

Distinguons plusieurs cas selon la position de x :

Cas 1 : $x \geq 1$. Alors $x-1 \geq 0$, donc $y \geq 0$ dans l'intervalle d'intégration :

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^{-y} dy = [-e^{-y}]_{x-1}^{x+1} = e^{-(x-1)} - e^{-(x+1)} = e^{-x}(e - e^{-1})$$

Cas 2 : $x \leq -1$. Alors $x+1 \leq 0$, donc $y \leq 0$ dans l'intervalle d'intégration :

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^y dy = [e^y]_{x-1}^{x+1} = e^{x+1} - e^{x-1} = e^x(e - e^{-1})$$

Cas 3 : $-1 < x < 1$. L'intervalle $[x-1, x+1]$ contient 0. On sépare l'intégrale :

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{x-1}^0 e^y dy + \int_0^{x+1} e^{-y} dy = [e^y]_{x-1}^0 + [-e^{-y}]_0^{x+1} \\ &= (1 - e^{x-1}) + (1 - e^{-(x+1)}) = 2 - e^{x-1} - e^{-x-1}\end{aligned}$$

En résumé :

$$(f * g)(x) = \begin{cases} e^x(e - e^{-1}) & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - e^{x-1} - e^{-x-1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ e^{-x}(e - e^{-1}) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 129. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit l'autocorrélation de f par :

$$C_f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\overline{f(y-x)}dy$$

Montrer que $\mathcal{F}[C_f](\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$.

Solution 129. On remarque que $C_f(x) = (f * \tilde{f})(x)$ où $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. En effet :

$$(f * \tilde{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\tilde{f}(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\overline{f(y-x)}dy = C_f(x)$$

Calculons la transformée de Fourier de \tilde{f} :

$$\mathcal{F}[\tilde{f}](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)}e^{-i\xi x}dx$$

Faisons le changement de variable $u = -x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{f}](\xi) &= \int_{+\infty}^{-\infty} \overline{f(u)}e^{i\xi u}(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)}e^{i\xi u}du \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u}du} \\ &= \overline{\hat{f}(\xi)} \end{aligned}$$

D'après la propriété du produit de convolution, on a :

$$\mathcal{F}[C_f](\xi) = \mathcal{F}[f * \tilde{f}](\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \mathcal{F}[\tilde{f}](\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2$$

Ce résultat est fondamental en traitement du signal : le spectre de puissance d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

5.5-4 Applications

Exercice 130. On considère l'équation de la chaleur sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- En prenant la transformée de Fourier par rapport à x , résoudre l'équation.
- Exprimer la solution sous forme de produit de convolution.
- Donner la solution explicite lorsque $f(x) = e^{-x^2}$.

Solution 130.

(a) On note

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_x[u(x, t)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)e^{-i\xi x}dx.$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation par rapport à x :

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi, t)$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

C'est une équation différentielle ordinaire en t pour chaque ξ fixé :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, 0) e^{-\xi^2 t}$$

Or $\hat{u}(\xi, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)](\xi) = \hat{f}(\xi)$. Donc :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

(b) Pour inverser la transformée de Fourier, on remarque que :

$$e^{-\xi^2 t} = \mathcal{F}[g_t(x)](\xi)$$

où $g_t(x)$ est telle que $\mathcal{F}[g_t](\xi) = e^{-\xi^2 t}$.

On sait que

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Ici, on veut $e^{-\xi^2 t}$, donc on prend $a = 1/(4t)$:

$$\mathcal{F} \left[e^{-x^2/(4t)} \right] (\xi) = \sqrt{4\pi t} e^{-\xi^2 t}$$

Donc :

$$e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathcal{F} \left[e^{-x^2/(4t)} \right] (\xi)$$

Ainsi, par le théorème de convolution :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cdot \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \right] (\xi) = \mathcal{F} \left[f * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} \right] (\xi)$$

D'où, en prenant la transformée inverse :

$$u(x, t) = (f * g_t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy$$

(c) Pour $f(x) = e^{-x^2}$, on a :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2/(4t)} dy$$

On développe l'exponentielle :

$$\begin{aligned} -y^2 - \frac{(x-y)^2}{4t} &= -y^2 - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4t} \\ &= -\frac{x^2}{4t} - \left(1 + \frac{1}{4t}\right) y^2 + \frac{2xy}{4t} \\ &= -\frac{x^2}{4t} - \frac{4t+1}{4t} y^2 + \frac{x}{2t} y \end{aligned}$$

On complète le carré en y :

$$\begin{aligned} -\frac{4t+1}{4t} y^2 + \frac{x}{2t} y &= -\frac{4t+1}{4t} \left(y^2 - \frac{2x}{4t+1} y \right) \\ &= -\frac{4t+1}{4t} \left[\left(y - \frac{x}{4t+1} \right)^2 - \frac{x^2}{(4t+1)^2} \right] \\ &= -\frac{4t+1}{4t} \left(y - \frac{x}{4t+1} \right)^2 + \frac{x^2}{4t(4t+1)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} e^{x^2/(4t(4t+1))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4t+1}{4t} \left(y - \frac{x}{4t+1}\right)^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2 \left(\frac{1}{4t} - \frac{1}{4t(4t+1)}\right)} \sqrt{\frac{4\pi t}{4t+1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-x^2 \left(\frac{4t+1-1}{4t(4t+1)}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-x^2/(4t+1)}
 \end{aligned}$$

On vérifie que pour $t = 0$, on retrouve bien $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

Exercice 131. On considère l'équation des ondes sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

où $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Résoudre l'équation en utilisant la transformée de Fourier.
2. Retrouver la formule de d'Alembert.

Solution 131. (a) On prend la transformée de Fourier par rapport à x :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\xi, t) \\
 \mathcal{F} \left[c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] &= -c^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t)
 \end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\xi, t) = -c^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

C'est une équation différentielle du second ordre en t :

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(c\xi t) + B(\xi) \sin(c\xi t)$$

Les conditions initiales donnent :

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\xi, 0) &= A(\xi) = \hat{f}(\xi) \\
 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) &= c\xi B(\xi) = \hat{g}(\xi)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(c\xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{c\xi} \sin(c\xi t)$$

(b) Pour inverser la transformée de Fourier, on utilise les formules :

$$\begin{aligned}
 \cos(c\xi t) &= \frac{e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}}{2} \\
 \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} &= \mathcal{F} \left[\frac{1}{2c} \mathbb{I}_{[-ct, ct]}(x) \right] (\xi)
 \end{aligned}$$

Plus précisément, on sait que $\mathcal{F} \left[\frac{\sin(ax)}{x} \right] (\xi) = \pi \mathbb{I}_{[-a, a]}(\xi)$, donc par dualité :

$$\mathcal{F} \left[\mathbb{I}_{[-a, a]}(x) \right] (\xi) = \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$$

Ainsi :

$$\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} = \frac{1}{2c} \mathcal{F} [\mathbb{I}_{[-ct, ct]}] (\xi)$$

Donc :

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cdot \frac{e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}}{2} + \hat{g}(\xi) \cdot \frac{1}{2c} \mathcal{F} [\mathbb{I}_{[-ct, ct]}] (\xi)$$

Par les propriétés de translation et de convolution :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} (g * \mathbb{I}_{[-ct, ct]})(x) \\ &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \end{aligned}$$

C'est la formule de d'Alembert pour l'équation des ondes sur \mathbb{R} .

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil essentiel pour l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires. Sa capacité à transformer des équations différentielles en équations algébriques simplifie considérablement la résolution de nombreux problèmes en ingénierie et en physique.

6.1 Définition et conditions d'existence

Définition 6.1.1. Soit $f(t)$ une fonction définie pour $t \geq 0$. La **transformée de Laplace** de $f(t)$ est une intégrale impropre définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

où $s = \sigma + i\omega$ est une variable complexe.

6.1.1 Conditions d'existence

Pour que la transformée de Laplace existe, $f(t)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

1. $f(t)$ est **continu par morceaux** sur tout intervalle fini $[0, T]$
2. $f(t)$ est d'**ordre exponentiel**, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $M > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ telles que :

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \text{pour tout } t \geq T$$

Sous ces conditions, la transformée de Laplace existe pour $\text{Re}(s) > c$.

Exemple 54. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = 1, \quad f(t) = t, \quad f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f(t) = e^{at},$$

$$f(t) = \sin(\omega t), \quad f(t) = \cos(\omega t), \quad f(t) = \sinh(at), \quad f(t) = \cosh(at)$$

Solution : On rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ (définie pour $t \geq 0$) est :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

avec $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

(a) Pour $f(t) = 1$:

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (\text{si } \text{Re}(s) > 0)$$

La fonction $f(t)$	La transformé $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Conditions
$\delta(t)$ (impulsion de Dirac)	1	$s \in \mathbb{C}$
$u(t)$ (échelon unité)	$1/s$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t	$1/s^2$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
t^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a $
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\operatorname{Re}(s) > a$

TABLE 6.1 – Tableau des transformées de Laplace usuelles

(b) Pour $f(t) = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(c) Pour $f(t) = t^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) : Par récurrence ou en utilisant la fonction Gamma, on a :

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)$$

(d) Pour $f(t) = e^{at}$:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(e) Pour $f(t) = \sin(\omega t)$: On utilise $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, donc $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(s+i\omega) - (s-i\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(f) Pour $f(t) = \cos(\omega t)$: De même, $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)\end{aligned}$$

(g) Pour $f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a} \right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(a)|)\end{aligned}$$

(h) Pour $f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s + a} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(a)|)\end{aligned}$$

Exercice 132. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = te^{at}, \quad f(t) = t, \quad \sin(\omega t)f(t) = t \cos(\omega t), \quad f(t) = e^{at} \sin(\omega t), \quad f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$$

Solution 132.

(a) Pour $f(t) = te^{at}$: On utilise la propriété de dérivation par rapport à un paramètre ou la formule générale :

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

Pour $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = \frac{1}{(s - a)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(b) Pour $f(t) = t \sin(\omega t)$: On utilise la propriété : $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$ où $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Ici, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \sin(\omega t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\omega \cdot \frac{-2s}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)\end{aligned}$$

(c) Pour $f(t) = t \cos(\omega t)$: De même, $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos(\omega t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\frac{(s^2 + \omega^2) - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= -\frac{s^2 + \omega^2 - 2s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)\end{aligned}$$

(d) Pour $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$: On utilise la propriété de translation : $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a)$ où $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Ici, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(e) Pour $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$: De même :

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(\omega t)\}(s) = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

6.2 Propriétés fondamentales

Linéarité

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Translation en temps (retard) Pour $a > 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as} F(s),$$

où $u(t)$ est la fonction échelon unité.

1- Translation en fréquence (modulation)

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

2- Changement d'échelle

Pour $a > 0$:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3- Dérivation en temps

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+), \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+),$$

En générale

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+).$$

4- Intégration en temps

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

5- Dérivation en fréquence

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

6- Intégration en fréquence

Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe, alors :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u) du.$$

7- Convolution

La convolution temporelle correspond à une multiplication fréquentielle :

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s).$$

8- Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s),$$

sous réserve d'existence des limites.

9- Valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s),$$

sous réserve que tous les pôles de $sF(s)$ soient à partie réelle strictement négative.

6.3 Transformée inverse

Définition 6.3.1. La transformée inverse de Laplace est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

où γ est choisi à droite de tous les pôles de $F(s)$.

Convolution

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$$

Méthodes de calcul

1. **Utilisation des tables** : Reconnaître des formes standards
2. **Décomposition en éléments simples** : Pour les fonctions rationnelles
3. **Théorème des résidus** : Pour les fonctions méromorphes

Pour une fonction rationnelle $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$:

— **Pôles simples** : Si $Q(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$ avec p_i distincts :

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}, \quad A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)F(s)$$

— **Pôles multiples** : Si $Q(s) = (s - p)^m \dots$:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p} + \frac{A_2}{(s - p)^2} + \dots + \frac{A_m}{(s - p)^m} + \dots$$

$$\text{avec } A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} [(s - p)^m F(s)]$$

6.4 Applications

6.4.1 Résolution d'équations différentielles

La méthode générale comprend :

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle
2. Résoudre l'équation algébrique en $F(s)$
3. Calculer la transformée inverse pour obtenir $f(t)$

■ **Exemple 55.** Soit $y' + ay = f(t)$ avec $y(0) = y_0$.

Solution : En appliquant la transformée

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = F(s)$$

D'où

$$Y(s) = \frac{F(s) + y_0}{s + a}$$

et donc $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

■ **Exemple 56.** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = 0, \quad \text{avec } y(0) = 1$$

Solution :

On applique la transformée de Laplace à l'équation :

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Alors :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 0$$

$$(s + 2)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s + 2}$$

En prenant la transformée inverse :

$$y(t) = e^{-2t}$$

6.4.2 Systèmes d'équations différentielles

La transformée de Laplace transforme un système d'EDO en un système algébrique.

6.4.3 Équations intégro-différentielles

Pour résoudre $y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = f(t)$, on utilise :

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{Y(s)}{s}}$$

■ **Exemple 57.** Résoudre l'équation intégro-différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad \text{avec } y(0) = 0$$

Solution :

On applique la transformée de Laplace à l'équation. On note $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

On a :

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{Y(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

L'équation transformée est donc :

$$sY(s) + \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

Multiplions par s :

$$s^2Y(s) + Y(s) = 1$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Ainsi :

$$y(t) = \sin t$$

Vérification :

$$y'(t) = \cos t, \quad \int_0^t y(\tau)d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Donc

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)d\tau = \cos t + 1 - \cos t = 1.$$

Condition initiale : $y(0) = \sin 0 = 0$.

6.4.4 Fonction de transfert

Pour un système linéaire invariant dans le temps décrit par :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t),$$

La fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

6.4.5 Fonction de Dirac $\delta(t)$

La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}.$$

6.4.6 Dérivée de l'échelon

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

6.4.7 Transformée unilatérale

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Utilisée pour les systèmes causaux ($f(t) = 0$ pour $t < 0$).

6.4.8 Transformée bilatérale

$$\mathcal{L}_b\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Utilisée pour les signaux non causaux.

6.5 Relations avec autres transformées

a- Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace bilatérale avec $s = i\omega$:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{L}_b\{f(t)\}(s = i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

b- Série de Fourier

Pour les signaux périodiques $f(t)$ de période T , on a :

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt.$$

6.6 Exercices corrigés

6.6.1 Calcul de transformées de Laplace

Exercice 133. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

- (a) $f(t) = 1$
- (b) $f(t) = t$
- (c) $f(t) = t^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)
- (d) $f(t) = e^{at}$
- (e) $f(t) = \sin(\omega t)$
- (f) $f(t) = \cos(\omega t)$
- (g) $f(t) = \sinh(at)$
- (h) $f(t) = \cosh(at)$

Solution 133. On rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ (définie pour $t \geq 0$) est :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

avec $s \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale converge.

(a) Pour $f(t) = 1$:

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)$$

(b) Pour $f(t) = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^{+\infty} te^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(c) Pour $f(t) = t^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) : Par récurrence ou en utilisant la fonction Gamma, on a :

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0)$$

(d) Pour $f(t) = e^{at}$:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(e) Pour $f(t) = \sin(\omega t)$: On utilise $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, donc $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(s+i\omega) - (s-i\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(f) Pour $f(t) = \cos(\omega t)$: De même, $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(g) Pour $f(t) = \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(a)|) \end{aligned}$$

(h) Pour $f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(a)|) \end{aligned}$$

Exercice 134. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

- (a) $f(t) = te^{at}$
- (b) $f(t) = t \sin(\omega t)$
- (c) $f(t) = t \cos(\omega t)$
- (d) $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$

(e) $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$

Solution 134.

(a) Pour $f(t) = te^{at}$: On utilise la propriété de dérivation par rapport à un paramètre ou la formule générale :

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Pour $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(b) Pour $f(t) = t \sin(\omega t)$: On utilise la propriété : $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$ où $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Ici, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \sin(\omega t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\omega \cdot \frac{-2s}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(c) Pour $f(t) = t \cos(\omega t)$: De même, $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos(\omega t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= -\frac{(s^2 + \omega^2) - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= -\frac{s^2 + \omega^2 - 2s^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

(d) Pour $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$: On utilise la propriété de translation : $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$ où $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Ici, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, donc :

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

(e) Pour $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$: De même :

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(\omega t)\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (\text{si } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a))$$

6.6.2 Propriétés de la transformation de Laplace

Exercice 135. Démontrer les propriétés suivantes de la transformée de Laplace (sous réserve d'existence) :

- (a) Linéarité : $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$
- (b) Translation en t : $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$ pour $a > 0$, où $u(t)$ est la fonction échelon unité
- (c) Translation en s : $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$
- (d) Changement d'échelle : $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ pour $a > 0$
- (e) Dérivation en t : $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0^+)$
- (f) Dérivation en s : $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s) = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

$$(g) \text{ Intégration en } t : \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} (s) = \frac{F(s)}{s}$$

Solution 135.

(a) *Linéarité* : Découle directement de la linéarité de l'intégrale.

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

(b) *Translation en t* : Soit $g(t) = f(t-a)u(t-a)$ où $u(t)$ est la fonction échelon unité ($u(t) = 1$ si $t \geq 0$, 0 sinon).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt \quad (\text{car } u(t-a) = 0 \text{ pour } t < a) \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du \quad (\text{changement de variable } u = t-a) \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\ &= e^{-as} F(s) \end{aligned}$$

(c) *Translation en s* :

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt = F(s-a)$$

(d) *Changement d'échelle* : Pour $a > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u/a)} du \quad (\text{changement de variable } u = at) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-(s/a)u} du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

(e) *Dérivation en t* : Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} - f(0^+) + sF(s) \end{aligned}$$

Sous les conditions de convergence de la transformée de Laplace, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} = 0$ pour $\text{Re}(s)$ suffisamment grand, donc :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0^+)$$

(f) *Dérivation en s : Par dérivation sous le signe intégral (justifiée par des conditions de régularité),*

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)(-t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient : $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s) = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$.

(g) *Intégration en t : Soit $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Alors $g'(t) = f(t)$ et $g(0) = 0$. D'après la propriété de dérivation :*

$$\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

Mais $\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, donc :

$$s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

6.6.3 Transformée inverse et décomposition en éléments simples

Exercice 136. *Calculer la transformée inverse de Laplace des fonctions suivantes :*

(a) $F(s) = \frac{1}{s+3}$

(b) $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

(c) $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$

(d) $F(s) = \frac{5}{s^2-9}$

(e) $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+13}$

(f) $F(s) = \frac{s^2+1}{s(s-1)(s+2)}$

(g) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$

(h) $F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2+1}$

Solution 136.

(a)

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

On reconnaît $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, donc avec $a = -3$:

$$f(t) = e^{-3t}$$

(b)

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

On sait que $\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$, donc avec $a = -2$:

$$f(t) = te^{-2t}$$

(c)

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

On reconnaît $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, donc avec $\omega = 2$:

$$f(t) = \cos(2t)$$

(d)

$$F(s) = \frac{5}{s^2 - 9}$$

On écrit $\frac{5}{s^2 - 9} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{s^2 - 3^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{s^2 - 3^2} \cdot \frac{2}{3}$.

On sait que

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2},$$

donc $\frac{a}{s^2 - a^2} = \mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s)$. Ici, $\frac{3}{s^2 - 9} = \mathcal{L}\{\sinh(3t)\}(s)$, donc :

$$f(t) = \frac{5}{3} \sinh(3t) \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{5}{s^2 - 9} = \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{6}{s^2 - 9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{s^2 - 9} \cdot 2$$

En fait, directement : $\frac{5}{s^2 - 9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{s^2 - 9} = \frac{5}{3} \mathcal{L}\{\sinh(3t)\}(s)$, donc :

$$f(t) = \frac{5}{3} \sinh(3t)$$

(e)

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 4s + 13}$$

On complète le carré au dénominateur :

$$s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9 = (s + 2)^2 + 3^2$$

On écrit le numérateur en fonction de $(s + 2)$:

$$2s + 3 = 2(s + 2) - 1$$

Donc :

$$F(s) = \frac{2(s + 2)}{(s + 2)^2 + 3^2} - \frac{1}{(s + 2)^2 + 3^2}$$

On reconnaît :

$$\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2} = \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}(s)$$

$$\frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2} = \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s)$$

Donc :

$$F(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos(3t)\}(s) - \frac{1}{3} \cdot 3\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)\}(s)$$

Ainsi :

$$f(t) = 2e^{-2t} \cos(3t) - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin(3t)$$

(f)

$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s-1)(s+2)}$$

On décompose en éléments simples. On cherche A, B, C tels que :

$$\frac{s^2 + 1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$$

En multipliant par $s(s-1)(s+2)$:

$$s^2 + 1 = A(s-1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-1)$$

Pour $s = 0$:

$$1 = A(-1)(2) = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Pour $s = 1$:

$$2 = B(1)(3) = 3B \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

Pour $s = -2$:

$$5 = C(-2)(-3) = 6C \Rightarrow C = \frac{5}{6}$$

Donc :

$$F(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s+2}$$

En prenant la transformée inverse :

$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e^t + \frac{5}{6}e^{-2t}$$

(g)

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

On utilise la propriété de translation en t : $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$. Ici, e^{-2s} correspond à un retard de 2. On sait que $\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$, donc :

$$f(t) = (t-2)u(t-2)$$

(h)

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2 + 1}$$

On peut écrire :

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{e^{-s}}{s^2 + 1}$$

On sait que $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, donc :

$$f(t) = \sin t - \sin(t-1)u(t-1)$$

6.6.4 Applications aux équations différentielles

Exercice 137. Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace :

- (a) $y' + 2y = 0$, avec $y(0) = 1$
- (b) $y' + 3y = e^{-t}$, avec $y(0) = 2$
- (c) $y'' + 4y = 0$, avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- (d) $y'' + 2y' + y = 0$, avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- (e) $y'' + y = \sin t$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(f) $y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Solution 137.

(a) Pour $y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$:

On applique la transformée de Laplace à l'équation :

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Alors :

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 0$$

$$(s + 2)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s + 2}$$

En prenant la transformée inverse :

$$y(t) = e^{-2t}$$

(b) Pour $y' + 3y = e^{-t}$, $y(0) = 2$:

On a :

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 3\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$$

Soit :

$$sY(s) - 2 + 3Y(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$(s + 3)Y(s) = \frac{1}{s + 1} + 2 = \frac{1 + 2(s + 1)}{s + 1} = \frac{2s + 3}{s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 3)}$$

Décomposons en éléments simples :

$$\frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3}$$

$$2s + 3 = A(s + 3) + B(s + 1)$$

Pour $s = -1$: $1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ Pour $s = -3$: $-3 = -2B \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

Donc :

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 3}$$

Et :

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t}$$

(c) Pour $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

On a :

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 4\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

Soit :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - s + 4Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 4)Y(s) = s$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

Donc :

$$y(t) = \cos(2t)$$

(d) Pour $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

On a :

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

Soit :

$$s^2Y(s) - s - 0 + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - s + 2sY(s) - 2 + Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 2$$

$$(s + 1)^2Y(s) = s + 2$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)^2} = \frac{s + 1 + 1}{(s + 1)^2} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2}$$

Donc :

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} = (1 + t)e^{-t}$$

(e) Pour $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$:

On a :

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s)$$

Soit :

$$s^2Y(s) - s \cdot 0 - 0 + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

On sait que $\mathcal{L}\{t \sin t\}(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$, ce qui ne correspond pas directement. On peut utiliser la convolution ou trouver une autre méthode. On va utiliser la décomposition :

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right)$$

Mais on reconnaît plutôt :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t - t \cos t}{2} \right\} (s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

En effet, on peut vérifier en calculant la transformée :

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\text{Donc } \mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t - t \cos t}{2} \right\} (s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Ainsi :

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$$

(f) Pour $y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$:

On a :

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 3\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)$$

Soit :

$$s^2Y(s) - s \cdot 0 - 1 + 3(sY(s) - 0) + 2Y(s) = \frac{1}{s + 3}$$

$$\begin{aligned}
 s^2Y(s) - 1 + 3sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+3} \\
 (s^2 + 3s + 2)Y(s) &= \frac{1}{s+3} + 1 = \frac{s+4}{s+3} \\
 (s+1)(s+2)Y(s) &= \frac{s+4}{s+3} \\
 Y(s) &= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}
 \end{aligned}$$

Décomposons en éléments simples :

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

alors

$$s+4 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$$

Pour $s = -1$:

$$3 = A(1)(2) = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

Pour $s = -2$:

$$2 = B(-1)(1) = -B \Rightarrow B = -2$$

Pour $s = -3$:

$$1 = C(-2)(-1) = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$Y(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - 2 \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

Et :

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

6.6.5 Systèmes d'équations différentielles

Exercice 138. Résoudre le système d'équations différentielles suivant en utilisant la transformée de Laplace :

$$\begin{cases}
 x'(t) = -2x(t) + y(t) \\
 y'(t) = x(t) - 2y(t)
 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

Solution 138. Soient

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) \quad \text{et} \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$

En appliquant la transformée de Laplace au système :

$$\begin{cases}
 sX(s) - x(0) = -2X(s) + Y(s) \\
 sY(s) - y(0) = X(s) - 2Y(s)
 \end{cases}$$

Soit, avec les conditions initiales :

$$\begin{cases}
 sX(s) - 1 = -2X(s) + Y(s) \\
 sY(s) - 2 = X(s) - 2Y(s)
 \end{cases}$$

On réorganise :

$$\begin{cases}
 (s+2)X(s) - Y(s) = 1 \\
 -X(s) + (s+2)Y(s) = 2
 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système algébrique. Par exemple, multiplions la première équation par $(s + 2)$ et ajoutons-la à la seconde :

$$\begin{aligned}(s + 2)^2 X(s) - (s + 2)Y(s) &= s + 2 \\ + \quad - X(s) + (s + 2)Y(s) &= 2 \\ \hline (s + 2)^2 X(s) - X(s) &= s + 4\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}[(s + 2)^2 - 1]X(s) &= s + 4 \\ (s^2 + 4s + 4 - 1)X(s) &= s + 4 \\ (s^2 + 4s + 3)X(s) &= s + 4 \\ (s + 1)(s + 3)X(s) &= s + 4\end{aligned}$$

Donc

$$X(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 3)}$$

Décomposons en éléments simples :

$$\frac{s + 4}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3}.$$

Alors

$$s + 4 = A(s + 3) + B(s + 1)$$

Pour $s = -1$:

$$3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Pour $s = -3$:

$$1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$X(s) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 3}$$

D'où :

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Pour trouver $y(t)$, on utilise par exemple la première équation : $Y(s) = (s + 2)X(s) - 1$.

$$Y(s) = (s + 2) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 3} \right) - 1$$

Calculons :

$$\frac{s + 2}{s + 1} = 1 + \frac{1}{s + 1}, \quad \frac{s + 2}{s + 3} = 1 - \frac{1}{s + 3}$$

Donc :

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{s + 1} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s + 3} \right) - 1 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 3} - 1 \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 3} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + 3}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

On vérifie que les conditions initiales sont satisfaites : $x(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, $y(0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

6.6.6 Équations intégro-différentielles

Exercice 139. Résoudre l'équation intégro-différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad \text{avec } y(0) = 0$$

Solution 139. On applique la transformée de Laplace à l'équation. On note $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

On a :

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{Y(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

L'équation transformée est donc :

$$sY(s) + \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

Multiplions par s :

$$s^2Y(s) + Y(s) = 1$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Ainsi :

$$y(t) = \sin t$$

Vérification :

$$y'(t) = \cos t, \quad \int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Donc

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = \cos t + 1 - \cos t = 1.$$

Condition initiale : $y(0) = \sin 0 = 0$.

Exercice 140 (Équation avec second membre discontinu). Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \text{où } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

Solution 140. On utilise la transformée de Laplace. Notons $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. On a

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y.$$

La fonction $f(t)$ peut s'écrire

$$f(t) = t - tH(t-1)$$

où H est l'échelon unité. En effet, pour $t \geq 1$,

$$t - tH(t-1) = t - t = 0.$$

Donc

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{tH(t-1)\}.$$

On sait que $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$. Pour le second terme, on utilise la propriété de translation :

$$\mathcal{L}\{g(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Ici, on veut $\mathcal{L}\{tH(t-1)\}$. Posons $g(t-1) = t \Rightarrow g(u) = u+1$, donc

$$\mathcal{L}\{tH(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} = e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

Ainsi, l'équation transformée est :

$$s^2Y + 4Y = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

D'où

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} - e^{-s}\frac{s+1}{s^2(s^2+4)}.$$

Décomposons $\frac{1}{s^2(s^2+4)}$ en éléments simples, on cherche

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

On trouve

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A=0 \\ 4B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=0 \\ B=1/4 \\ C=0 \\ D=-1/4 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}.$$

De même manière pour $\frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^2(s^2+4)} &= \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4} + \frac{1/4}{s} - \frac{s/4}{s^2+4} \\ &= \frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4(s+1)}{s^2+4} \\ &= \frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4} - \frac{s/4}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+4}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$Y(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) - e^{-s} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+4}\right).$$

Prenons la transformée inverse. On utilise les formules :

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t, \quad \mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4)\} = \frac{1}{2}\sin 2t, \quad \mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+4)\} = \cos 2t.$$

Donc

— Pour le premier terme :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right)\right\} = \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

— Pour le second terme avec e^{-s} , on utilise le théorème de translation :

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a).$$

Ici $a = 1$. Soit

$$F(s) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+4} \right).$$

Alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{4} \left(1+t - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+4} \right\} \right).$$

Calculons

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+4} \right\} = \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Donc

$$f(t) = \frac{1}{4} \left(1+t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$

Ainsi la solution est :

$$y(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} \left[1 + (t-1) - \cos 2(t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1) \right] H(t-1).$$

On peut simplifier pour $t \geq 1$:

$$y(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} \left(t - \cos(2t-2) - \frac{1}{2} \sin(2t-2) \right) H(t-1).$$

Exercice 141 (Équation intégro-différentielle). Résoudre l'équation :

$$y'(t) + y(t) = \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Solution 141. L'intégrale est un produit de convolution : $(y * \cos)(t)$. La transformée de Laplace du cos est $\frac{s}{s^2+1}$.

On applique Laplace à l'équation. Soit $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Alors

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 1.$$

Le terme de convolution donne

$$\mathcal{L}\{y * \cos\} = Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

L'équation devient :

$$sY - 1 + Y = Y \cdot \frac{s}{s^2+1}.$$

Soit

$$(s+1)Y - 1 = \frac{s}{s^2+1}Y.$$

Donc

$$(s+1)Y - \frac{s}{s^2+1}Y = 1 \Rightarrow Y \left(s+1 - \frac{s}{s^2+1} \right) = 1.$$

d'où

$$s+1 - \frac{s}{s^2+1} = \frac{(s+1)(s^2+1) - s}{s^2+1} = \frac{(s^3+s+s^2+1) - s}{s^2+1} = \frac{s^3+s^2+1}{s^2+1}.$$

Donc

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3+s^2+1}.$$

La solution est donnée par $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2+1}{s^3+s^2+1} \right\}$.

Exercice 142 (Utilisation de la transformée de Laplace). Résoudre l'équation intégral-différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Solution 142. Appliquons la transformée de Laplace. Notons $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. On a

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1.$$

La transformée du terme intégral est

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{Y(s)}{s}.$$

L'équation devient :

$$sY - 1 + Y = \frac{Y}{s}.$$

Multiplions par s : $s^2Y - s + sY = Y$, soit

$$s^2Y + sY - Y = s.$$

Factorisons Y

$$Y(s^2 + s - 1) = s.$$

Ainsi :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + s - 1}.$$

On décompose Le dénominateur en éléments simples :

$$\frac{s}{s^2 + s - 1} = \frac{A}{s - \alpha} + \frac{B}{s - \beta}$$

avec

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On trouve

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\beta}{\beta - \alpha} = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}.$$

Puisque β est négatif, on peut réécrire. Finalement, en prenant la transformée inverse :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}).$$

En utilisant

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5},$$

on peut simplifier. Mais on laisse sous cette forme. Vérifions la condition initiale :

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Exercice 143 (Système linéaire à coefficients constants). Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Solution 143. Écrivons le système sous forme matricielle : $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Pour $\lambda = 1$:

$$(A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est :

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \quad y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

Conditions initiales :

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad y(0) = -C_1 + C_2 = 0.$$

En additionnant :

$$2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1/2,$$

puis $C_1 = 1 - 1/2 = 1/2$. D'où :

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Exercice 144. 1. Calculer $\mathcal{L}\{t^2 \sin(3t)\}$

2. Calculer $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{s^2+4s+13} \right\}$

3. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

4. Trouver la réponse impulsionnelle d'un système de fonction de transfert $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}$

5. Étudier la stabilité du système $H(s) = \frac{s+1}{s^3+3s^2+2s}$

Bibliographie

- [1] T. M. Apostol, (1969). *Calculus, Vol. II*. Wiley.
- [2] T. M. Apostol, (1974). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley.
- [3] R. N. Bracewell, (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill.
- [4] R. Courant, & F. John, (1989). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II*. Springer.
- [5] G. Doetsch, (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer.
- [6] R. Godement, (1998). *Analyse Mathématique I*. Springer.
- [7] L. Grafakos, (2008). *Classical Fourier Analysis*. Springer.
- [8] T. W. Körner, (1989). *Fourier Analysis*. Cambridge University Press.
- [9] W. Rudin, (1987). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- [10] L. Schwartz, (1991). *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann.
- [11] M. R. Spiegel, (1965). *Laplace Transforms*. McGraw-Hill.
- [12] E. M. Stein, & Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis : An Introduction*. Princeton University Press.
- [13] G. B. Thomas, (2014). *Thomas' Calculus*. Pearson.
- [14] C. Zuily, & Queffélec, H. (2013). *Éléments d'Analyse pour l'Agrégation*. Dunod.
- [15] A. Zygmund, (2002). *Trigonometric Series*. Cambridge University Press.